现代数学基础丛书

周期小波理论及其应用

● 彭思龙 李登峰 谌秋辉 著





(O-1692.0101)
责任编辑：李 锋 李鹏奇

现代数学基础丛书

拓扑群引论
公理集合论导引
丢番图逼近引论
Banach代数
紧黎曼曲面引论
广义哈密顿系统理论及其应用
解析数论基础
数理统计引论
多元统计分析引论
概率论基础
微分动力系统原理
二阶椭圆型方程与椭圆型方程组
分析概率论
非线性发展方程
黎曼曲面
傅里叶积分算子理论及其应用
微分方程定性理论
概率论基础和随机过程
复解析动力系统
反应扩散方法引论
离散鞅及其应用
动力系统的周期解与分支理论
环与代数
仿微分算子引论
实分析导论
对称性分岔理论基础
线性微分方程的非线性扰动
随机点过程及其应用
复变函数逼近论
线性整数规化的数学基础
组合矩阵论
算子代数
Banach空间中的非线性逼近理论
Gel'fond-Baker方法在丢番图方程中的应用
实用微分几何引论
半群的S-系理论
有限典型群子空间轨道生成的格
有限群导引（上册、下册）
随机模型的密度演化方法
非线性偏微分复方程
调和分析及其在偏微分方程中的应用
惯性流形与近似惯性流形
数学规划导论
拓扑空间中的反例
拓扑空间论
非经典数理逻辑与近似推理
序半群引论
动力系统的定性与分支理论
金兹堡－朗道方程
微分方法中的变分方法
算子代数上线性映射引论
周期小波理论及其应用



ISBN 7-03-010947-3
定 价：16.00 元

现代数学基础丛书

周期小波理论及其应用

彭思龙　李登峰　谌秋辉　著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书简要地介绍了近年来周期小波的一些主要进展.第一章主要介绍了周期小波的主要框架,第二章介绍从周期基函数出发构造周期平移正交小波的方法和理论,第三章介绍了周期基插值小波的构造方法和相关性质,最后一章介绍了周期拟小波用于求解一维周期积分方程的快速算法.本书只需要读者具有基本的函数论基础就可以阅读,涉及的内容基本上自封闭.

本书可作为希望学习和了解周期小波理论及其应用的研究生教材,也可作为相关专业的广大科研工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

周期小波理论及其应用/彭思龙　李登峰　谌秋辉著.—北京:科学出版社,2003
(现代数学基础丛书)
ISBN 7-03-010947-3

Ⅰ.周…　Ⅱ.①彭…②李…③谌…　Ⅲ.周期-小波分析　Ⅳ.O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第087447号

责任编辑:李　锋　李鹏奇/责任校对:柏连海
责任印制:安春生/封面设计:王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2003年3月第　一　版　开本:850×1168　1/32
2003年3月第一次印刷　印张:6 1/4
印数:1—3 000　字数:158 000

定价:16.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前　言

本书的作者是三位年轻数学家，他们以前都曾是中国科学院数学研究所小波分析讨论班的博士研究生，对这个领域的研究工作比较熟悉.

由于在自然界中有许多现象具有周期性，因此在理论研究及应用中经常遇到周期函数类，归结成数学物理中的问题后，许多都涉及对周期函数的逼近问题.由于许多函数空间中的函数都可以用小波级数去逼近(见[2] 及[3])，人们自然要问：对于周期函数类，是否可以有合适的周期小波去逼近？这“合适”二字是指具有各种性能的小波，而不是由简单的叠加现成的直线上的小波构成(具体可参见[1]的第二章及第四章的内容).

我们知道，许多函数空间中的函数是可以用样条函数空间去逼近的，把样条函数的节点细分后，在其上构成的样条函数空间自然地形成子空间，一个套在另一个里面，形成子空间序列.但是周期样条函数类如何正交化，在当时是不清楚的.样条函数虽然有许多优秀的特点，但是如果正交化问题不解决，就很难构成具有正交多尺度分析意义下的函数空间序列.正在这个时候，崔锦泰教授从美国来华讲学，他介绍了在 J A T(1988)中一篇关于周期样条正交化的文章(即[44])，我受到启发后，于 1993 年一月完成了一篇文章，题目是：“周期样条小波的构造”，由于基的构造十分重要，所以我又继续用各种不同的样条函数构造了各种周期的及其反周期的小波(见[1]第一章及[7]，[8]，[9]，[10])，这些工作带动了国内一些数学工作者在这方面的研究.在这个基础上，我们用周期拟小波求解积分方程获得成功(见[29]，[35]和[1])，得到了在刚性矩阵给定的条件下，复杂度为 $O(N)$的结果.为什么会获得这么好的结果呢？主要是用了周期拟小波的双尺度方程只含两项以及样

条正交化技巧的特点，又结合多尺度策略（见本书第四章）而得出的．这是我们讨论班一个方面的工作．

第二方面，如何构造完美的小波？这"完美"二字的含义是构造出的小波要具有尽可能多的在实际运用中需要的性能，例如双正交性、对称性、实值、任意指定的光滑度、插值性、明确的解析表达式及局部性等．要构造这样的小波本身不容易，但是更困难的是验证它具有这些性质，特别是局部性的证明是件十分困难的事（可见[24]，[25]，[26]）．这些都反映在[1]中了．

以上介绍的仅仅是从 1992～1999 期间的工作情况．[1]虽然反映了本组在周期小波及周期拟小波的研究情况，但是从周期多尺度分析讲，国际上的一些有关理论的发展情况还没有反映进来，而且[1]是在国际上发表的，价格昂贵，许多读者都无力购买，因此有这本介绍周期小波的书，且用中文书写，就十分必要了．

本书的第一章大部分篇幅介绍了周期函数的多尺度分析的理论，部分引自新加坡数学家 S L Lee 等人的工作（见[11]），另一部分引自本组成员的工作．

第二章主要是美国数学家 Narcowitch 和 J. Ward 的工作（见[12]），主要介绍了在周期小波方面的一个重要的组成部分：周期正交平移不变子空间及其相应小波的构造．

第三章和第四章的内容都是本组的工作，也可见[1]．主要介绍了周期基插值小波的构造及其性质以及周期拟小波的积分方程快速算法．

略嫌不足的是，本组第一方面的工作（见[1]第二章）即各种周期拟小波的构造没有完全反映到本书中来，只有一小节（即第四章的第二小节）写了一点，但这不能反映出本组在这方面的全貌．不管怎样，本书对有兴趣研究周期小波的人都是一本很好的读物．凡是具有初步泛函分析及初步调和分析知识的人都可以读懂本书．

希望通过本书的出版，能有更多的读者对周期小波感兴趣，能

注：本组是指中国科学院数学研究所小波分析研究小组．

有更多的人投入研究,发展与这个领域有关的理论及其应用,有更多新的成果出现.

中国科学院数学研究所
陈翰麟
2002年9月5日
写于北京中关村

目　录

第一章　周期小波理论

本章将致力于周期小波理论的讨论. 因为直线上的小波早于周期小波出现,所以直线上小波的某些基本知识在本书中被假定已知. 本章相关定义和定理可参考[1],[10],[14]和[15],不再一一注明.

§1.1　一些必要知识

讨论周期小波,需要用到 Fourier 分析的一些相关知识. 为此,我们在本节列出整本书所用到的基本内容.

我们考虑周期为 1 的函数空间,即

$$L^2([0,1]) := \{f(x) \mid f(x) = f(x+1), \int_0^1 |f(x)|^2 < +\infty\}.$$

对 $f(x), g(x) \in L^2([0,1])$,内积 $\langle f, g \rangle$ 定义为

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \bar{g}(x) \mathrm{d}x,$$

f 的 Fourier 变换是

$$\hat{f}(2\pi n) := \int_0^1 f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nx} \mathrm{d}x \quad (n \in Z)$$

及逆 Fourier 变换和 Parseval 公式是

$$f(x) = \sum_{n \in Z} \hat{f}(2\pi n) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx},$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in Z} \hat{f}(2\pi n) \overline{\hat{g}}(2\pi n),$$

这里 Z 表示所有整数所组成的集合.

我们也将用到有限 Fourier 变换. 如果 $\{a_l\}_l$ 是一个周期为 M 的序列,那么 $\{a_l\}_l$ 的 Fourier 变换(DFT) $\{\hat{a}_k\}_k$ 和逆 DFT(IDFT)

分别为

$$\text{DFT}:\hat{a}_k := \sum_{l=0}^{M-1} a_l \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kl}{M}},$$

$$\text{IDFT}:a_l := \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} \hat{a}_k \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi kl}{M}}.$$

有限的 Parseval 等式为

$$\sum_{k=0}^{M-1} a_k \bar{b}_k = M\sum_{k=0}^{M-1} \hat{a}_k \bar{\hat{b}}_k,$$

其中$\{b_k\}_{k=0}^{M-1}$是另一个周期为 M 的序列.

§1.2 周期多尺度分析的定义及它的初等性质

构造周期小波的方法是周期多尺度分析(简称 PMRA). 与直线上的多尺度分析一样,伸缩与平移仍然是我们讨论的 PMRA 中的两个重要运算,但是它们的作用与形式是不同于直线上的.

1.2.1 PMRA 的定义

定义 1.2.1.1 设$\{V_j\}_{j\in Z_+}$是 $L^2([0,1])$一列闭子空间. 称它为 $L^2([0,1])$的一个多尺度分析(PMRA),如果下列条件满足:

(i) $V_j\subset V_{j+1}, j\in Z_+$(单调性);

(ii) $\overline{\bigcup_{j\in Z_+} V_j} = L^2([0,1])$(稠密性);

(iii) 存在 $\phi_j(x)\in V_j$ 使 $\left\{\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0,\cdots,2^j-1}$ 为 V_j 的一个基. 其中 $Z_+=\{0,1,\cdots\}$, 函数序列$\{\phi_j(x)\}_{j\in Z_+}$称为 PMRA $\{V_j\}_{j\in Z_+}$的尺度函数序列.

注记 1.2.1.1

1. 这里与直线上不同,我们不能指望不同 V_j 的生成函数为同一个函数的不同伸缩.

2. 在 PMRA 的定义中，我们要求$\left\{\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\middle|k=0,\cdots,2^j-1\right\}$为 V_j 的基，而不是明显提出 Riesz 基的要求，这是因为有限维空间上的基自然也是 Riesz 基.

3. PMRA 定义中的条件(iii)可加强为

(iii)* 存在 $\phi_j(x)\in V_j$，使得$\left\{\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\middle|l=0,\cdots,2^j-1\right\}$为 V_j 的一标准正交基. 因此我们有

定义 1.2.1.2 如果 $L^2([0,1])$的闭子空间列$\{V_j\}_{j\in Z_+}$满足定义 1.2.1.1 中的条件(i)，(ii)和上面条件(iii)*，那么我们称$\{V_j\}_{j\in Z_+}$为 $L^2([0,1])$的一正交周期多尺度分析(简称 OPMRA).

1.2.2 PMRA 的初等性质

性质 1.2.2.1 在一个 PMRA$\{V_j\}_{j\in Z_+}$中，V_j 是 $2^{-j}Z$ 平移不变的.

证明 明显地，

$$V_j=\left\{f(x)\mid f(x)=\sum_{k=0}^{2^j-1}c_k\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right),\{c_k\}_{k=0}^{2^j-1}\in l^2\right\}.$$

因此，$\forall l\in Z$，我们有

$$\begin{aligned}
f\left(x+\frac{l}{2^j}\right)&=\sum_{k=0}^{2^j-1}c_k\phi_j\left(x-\frac{k-l}{2^j}\right)\\
&=\sum_{s=-l}^{-1}c_{s+l}\phi_j\left(x-\frac{s}{2^j}\right)+\sum_{s=0}^{2^j-1-l}c_{s+l}\phi_j\left(x-\frac{s}{2^j}\right)\\
&=\sum_{s=2^j-l}^{2^j-1}c_{s+l-2^j}\phi_j\left(x-\frac{s-2^j}{2^j}\right)+\sum_{s=0}^{2^j-1-l}c_{s+l}\phi_j\left(x-\frac{s}{2^j}\right)\\
&=\sum_{s=0}^{2^j-1}\widetilde{c}_s\phi_j\left(x-\frac{s}{2^j}\right),
\end{aligned}$$

其中$\{\widetilde{c}_s\}_{s=0}^{2^j-1}\in l^2$.所以 $f(x+2^{-j}l)\in V_j$. 故 V_j 是 $2^{-j}Z$ 平移不变

的. 证毕.

在频域上, V_j 有下述表示:

性质 1.2.2.2 在一个 PMRA$\{V_j\}_{j\in Z_+}$中, V_j 的 Fourier 变换为

$$\hat{V}_j = \left\{ \hat{f}(2\pi n)_{n\in Z} \,\middle|\, f \in V_j, \hat{f}(2\pi n) = \sum_{k=0}^{2^j-1} c_k \sigma_j^{kn} \hat{\phi}_j(2\pi n), \right.$$
$$\left. \{c_k\}_{k=0}^{2^j-1} \in l^2 \right\},$$

其中 $\sigma_j = e^{i2\pi 2^{-j}}$.

这个性质的证明是容易的, 我们省略它.

注记 1.2.2.1 由 $\phi_j(x) \in V_{j+1}$ 和性质 1.2.2.2 知, 存在 $\{d_{j+1,k}\}_{k=0}^{2^{j+1}-1} \in l^2$ 使 $\forall n \in Z$,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_j(2\pi n) &= \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} d_{j+1,k}\, \sigma_{j+1}^{-kn} \hat{\phi}_{j+1}(2\pi n) \\ &= m_{j+1}(n) \hat{\phi}_{j+1}(2\pi n), \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

其中

$$\{m_{j+1}(n)\}_{j\in Z_+} = \left\{ \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} d_{j+1,k}\, \sigma_{j+1}^{-kn} \right\}_{j\in Z_+}$$

相当于直线上 MRA 中的滤波函数, 只是现在这种情形的滤波函数不是一个, 而是一族. 对固定的 j, $\{m_{j+1}(n)\}_n$ 为 $2^{j+1}Z$-周期序列. 公式(1.2.1)正是定义 1.2.1.1 中条件(i)在条件(iii)成立前提下判断的一个准则.

对一个 PMRA$\{V_j\}_{j\in Z_+}$, 我们可得 $L^2([0,1])$的如下值和分解. 记 W_j 为 V_j 在 V_{j+1}中的正交补, 那么

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j \oplus W_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j \\ &= \cdots = V_0 \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_j. \end{aligned}$$

因此由定义 1.2.1.1 中的条件(ii)知,

$$L^2([0,1]) = V_0 \oplus \sum_{j\in Z_+} \oplus W_j. \tag{1.2.2}$$

如果存在函数 $\psi_j(x)\in W_j$ 使得 $\left\{\psi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\Big| l=0,\cdots,2^j-1\right\}$ 为 W_j 的一个基,那么我们有

性质 1.2.2.3 在一个 PMRA$\{V_j\}_{j\in Z_+}$中,如果

$$\left\{\psi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\right\}_{k=0}^{2^j-1}$$

为 W_j 的一个基,则

$$\left\{\phi_0(x),\phi_0\left(x-\frac{1}{2}\right),\psi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\Big| j\in Z_+,k=0,\cdots,2^j-1\right\}$$

构成 $L^2([0,1])$的一个基.

证明 由(1.2.2)知,$L^2([0,1])$的任一元均可由函数族

$$\left\{\phi_0(x),\phi_0\left(x-\frac{1}{2}\right),\psi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\Big| j\in Z_+,k=0,\cdots,2^j-1\right\}$$

线性表示,而这族函数线性无关是显然的.证毕.

注记 1.2.2.2

1. 性质 1.2.2.3 中的函数族$\{\psi_j\}_{j\in Z_+}$称为一族周期小波.我们在后面第五节和第六节中分别用两种方法将表明$\{\psi_j(x)\}_{j\in Z_+}$的存在和构造.

2. 如果 PMRA 为 OPMRA,则性质 1.2.2.3 中的函数族为 $L^2([0,1])$的一个标准正交基.

§1.3 PMRA 中条件的判定

由定义 1.2.1.1 可看出,PMRA 的一般构造程序是先给出 $L^2([0,1])$的一个闭子空间增加族$\{V_j\}_{j\in Z_+}$,其中 V_j 是 $2^{-j}Z$ 平移不变的.然后在力图使它们满足定义 1.2.1.1 中的条件(ii)和(iii).本节就讨论条件(ii)和条件(iii)的判定准则.

1.3.1 函数平移的线性无关性

设 $j\in Z_+$,$\phi_j\in L^2([0,1])$.那么$\left\{\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$何时线性无

关呢？为此，我们首先给出如下命题：

命题 1.3.1.1 置 $\Phi_j=\left(\left\langle \phi_j\left(\cdot-\frac{k}{2^j}\right),\phi_j\left(\cdot-\frac{l}{2^j}\right)\right\rangle\right)_{k,l=0}^{2^j-1}$ 为一 $2^j\times 2^j$ 矩阵. 那么 Φ_j 具有下列性质：

(a) Φ_j 是一 Hermite 矩阵；

(b) Φ_j 是一循环矩阵；

(c) Φ_j 是半正定的；

(d) Φ_j 的行列式 $\det\Phi_j$ 满足 $0\leqslant\det\Phi_j\leqslant\|\phi_j\|^{2^j-1}$ 且不等式下界达到当且仅当 $\left\{\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\right\}_{k=0}^{2^j-1}$ 线性相关；上界达到当且仅当 $\left\{\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\right\}_{k=0}^{2^j-1}$ 中元相互正交. 特别，$\det\Phi_j=1$ 当且仅当 $\left\{\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\right\}_{k=0}^{2^j-1}$ 为标准正交系.

注记 1.3.1.1 设矩阵 $A=(a_{i,j})$. 如果 $A=A^*$，则称 A 为 Hermite 矩阵；如果 $a_{i,j}=a_{i-1,j-1}$，则称 A 为循环阵. 这里 $*$ 表示共轭转置.

证明 设矩阵 Φ_j 的第 k 行第 l 列处元素为 $(\Phi_j)_{k,l}$. 那么

$$\begin{aligned}(\Phi_j)_{k,l}&=\left\langle \phi_j\left(\cdot-\frac{k}{2^j}\right),\phi_j\left(\cdot-\frac{l}{2^j}\right)\right\rangle\\&=\overline{\left\langle \phi_j\left(\cdot-\frac{l}{2^j}\right),\phi_j\left(\cdot-\frac{k}{2^j}\right)\right\rangle}\\&=\overline{(\Phi_j)_{l,k}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Phi_j)_{k,l}&=\int_0^1\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\overline{\phi_j\left(x-\frac{i}{2^j}\right)}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\frac{1}{2^j}}^{1-\frac{1}{2^j}}\phi_j\left(y-\frac{k-1}{2^j}\right)\overline{\phi_j\left(y-\frac{l-1}{2^j}\right)}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{1-\frac{1}{2^j}}+\int_{-\frac{1}{2^j}}^0\phi_j\left(y+1-\frac{k-1}{2^j}\right)\overline{\phi_j\left(y+1-\frac{l-1}{2^j}\right)}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \int_0^{1-\frac{1}{2^j}} + \int_{1-\frac{1}{2^j}}^1$$

$$= (\Phi_j)_{k-1,l-1}.$$

因此(a)和(b)成立.

(c)对任意周期为 2^j 的复值序列 $\alpha = \{\alpha(k)\}_{k=0}^{2^j-1}$,

$$\alpha\Phi_j\alpha^* = \sum_{s=0}^{2^j-1}\left(\sum_{k=0}^{2^j-1}\alpha(k)\left\langle\phi_j\left(\cdot-\frac{s}{2^j}\right),\phi_j\left(\cdot-\frac{k}{2^j}\right)\right\rangle\right)\overline{\alpha(s)}$$

$$= \sum_{k=0}^{2^j-1}\left\langle\sum_{l=0}^{2^j-1}\overline{\alpha(s)}\phi_j\left(\cdot-\frac{s}{2^j}\right),\phi_j\left(\cdot-\frac{k}{2^j}\right)\right\rangle$$

$$= \left\langle\sum_{s=0}^{2^j-1}\overline{\alpha(s)}\phi_j\left(\cdot-\frac{s}{2^j}\right),\sum_{k=0}^{2^j-1}\overline{\alpha(k)}\phi_j\left(\cdot-\frac{k}{2^j}\right)\right\rangle$$

$$= \left\|\sum_{k=0}^{2^j-1}\overline{\alpha(k)}\phi_j\left(\cdot-\frac{s}{2^j}\right)\right\|^2 \geqslant 0.$$

因此,ϕ_j 半正定.

(d) 这条结论对循环矩阵来说是共有的性质,参见文献[54].证毕.

令

$$V_j = \left\{f(x)\mid f(x)\in L^2([0,1]),\right.$$

$$\left.f(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1}\alpha(k)\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\right\},$$

其中$\{\alpha(k)\}_{k=0}^{2^j-1}$是一个 2^j 周期的序列.则 V_j 在频域上的表示为

$$V_j = \{f(x)\mid f(x)\in L^2([0,1]),\hat{f}(2\pi n) = m_j(n)\hat{\phi}_j(2\pi n)\},$$

这里 $m_j(n) = \sum_{k=0}^{2^j-1}\alpha(k)\sigma_j^{-kn}$.

定义映射 I_j 如下:

$$I_j: l^2\{0,\cdots,2^j-1\}\rightarrow V_j$$

$$\alpha = \{\alpha(k)\}_k \to \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha(k)\phi_j\left(x - \frac{k}{2^j}\right),$$

则 I_j 是一个线性算子,其中 $\|\alpha\|^2 = \sum_{k=0}^{2^j-1} |\alpha(k)|^2$.

定理 1.3.1.1 下列六个条件相互等价:

(i) $\left\{\phi_j\left(x - \frac{k}{2^j}\right) \middle| k=0,\cdots,2^j-1\right\}$ 是一个线性无关系;

(ii) $\det \Phi_j > 0$;

(iii) Φ_j 的特征值 $\lambda_k(k=0,\cdots,2^j-1)>0$;

(iv) 对每个 $k = 0,\cdots,2^j-1$, $\sum_{l=0}^{2^j-1}\left\langle \phi_j, \phi_j\left(\cdot - \frac{l}{2^j}\right)\right\rangle \sigma_j^{-kl} > 0$;

(v) $\sum_{p\in Z} |\hat{\phi}_j(2\pi(k+2^jp))|^2 > 0$;

(vi) I_j 是一个同构算子.

证明 (i)⇔(ii)立即从命题 1.3.1.1 的(d)得到.

(ii)⇔(iii). 由于 Φ_j 半正定,所以 $\forall k=0,\cdots,2^j-1, \lambda_k \geqslant 0$. 因此由 $\det \Phi_j = \prod_{k=0}^{2^j-1} \lambda_k$ 知,(ii)与(iii)等价.

(iii)⇔(iv). 注意到 Φ_j 为循环矩阵,所以由文献[54]知,对 $k = 0,\cdots,2^j-1$,

$$\lambda_k = \sum_{l=0}^{2^j-1}\left\langle \phi_j, \phi_j\left(\cdot - \frac{l}{2^j}\right)\right\rangle \sigma_j^{-kl}.$$

因此(iii)与(iv)等价.

(iv)⇔(v). 由 Parseval 公式知,对 $l=0,\cdots,2^j-1$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{2^j-1}\left\langle \phi_j, \phi_j\left(\cdot - \frac{l}{2^j}\right)\right\rangle \sigma_j^{-kl} \\
&= \sum_{l=0}^{2^j-1}\sum_{n\in Z}\hat{\phi}_j(2\pi n)\,\overline{\hat{\phi}}_j(2\pi n)\sigma_j^{nl}\sigma_j^{-kl} \\
&= \sum_{n\in Z}|\hat{\phi}_j(2\pi n)|^2 \sum_{l=0}^{2^j-1}\sigma_j^{-(k-n)l}
\end{aligned}$$

$$=\sum_{p\in Z}\sum_{\beta=0}^{2^j-1}|\hat{\phi}_j(2\pi(\beta+p2^j))|^2\sum_{l=0}^{2^j-1}\sigma_j^{(p2^j+\beta-k)l}$$

$$=2^j\sum_{p\in Z}|\hat{\phi}_j(2\pi(+p2^j))|^2. \qquad (1.3.1)$$

公式(1.3.1)表明(iv)与(v)等价.

(v)⇔(vi). 对周期为 2^j 的序列 $\alpha=\{\alpha(k)\}_{k=0}^{2^j-1}$,

$$I_j(\alpha)(x)=\sum_{k=0}^{2^j-1}\alpha(k)\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right).$$

所以

$$\begin{aligned}\|I_j(\alpha)\|^2&=\langle I_j(\alpha)(\cdot),I_j(\alpha)(\cdot)\rangle\\&=\sum_{n\in Z}|I_j(\hat{\alpha})(2\pi n)|^2\\&=\sum_{n\in Z}|\hat{\alpha}(n)\hat{\phi}_j(2\pi n)|^2\\&=\sum_{k=0}^{2^j-1}\sum_{p\in Z}|\hat{\alpha}(k)\hat{\phi}_j(2\pi(k+2^jp))|^2\\&=\sum_{k=0}^{2^j-1}|\alpha(k)|^2\sum_{p\in Z}|\hat{\phi}_j(2\pi(k+2^jp))|^2. \qquad (1.3.2)\end{aligned}$$

要证 I_j 是一个同构算子,当且仅当需要证明存在正常数 A,B 使得对任意 $\alpha=\{\alpha(k)\}_{k=0}^{2^j-1}$,

$$A\sum_{k=0}^{2^j-1}|\alpha(k)|^2\leqslant\|I_j(\alpha)\|^2\leqslant B\sum_{k=0}^{2^j-1}|\alpha(k)|^2. \qquad (1.3.3)$$

由离散的 Parseval 等式知,

$$\sum_{k=0}^{2^j-1}|\alpha(k)|^2=\frac{1}{2^j}\sum_{k=0}^{2^j-1}|\hat{\alpha}(k)|^2.$$

所以由(1.3.2)和(1.3.3)知,只需证

$$A\sum_{k=0}^{2^j-1}|\hat{\alpha}(k)|^2$$

$$\leqslant 2^j \sum_{k=0}^{2^j-1} |\hat{\alpha}(k)|^2 \sum_{p\in Z} |\hat{\phi}_j(2\pi(k+2^j p))|^2$$

$$\leqslant B \sum_{k=0}^{2^j-1} |\hat{\alpha}(k)|^2. \tag{1.3.4}$$

即可. 明显地, (1.3.4)等价于下式:

$$0 < \sum_{p\in Z} |\hat{\phi}_j(2\pi(k+2^j p))|^2 < +\infty, \quad k = 0,\cdots,2^j-1.$$

因此, (v)与(vi)等价. 证毕.

推论 1.3.1.1 下列条件相互等价:

(i) $\left\{\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\right\}_{k=0}^{2^j-1}$ 是一标准正交系;

(ii) Φ_j 是一个单位阵;

(iii) Φ_j 的特征值为 1;

(iv) 对 $k=0,\cdots,2^j-1$, $\sum_{l=0}^{2^j-1}\left\langle \phi_j, \phi_j\left(\cdot - \frac{l}{2^j}\right)\right\rangle \sigma_j^{-kl} = 1$;

(v) 对 $k=0,\cdots,2^j-1$, $\sum_{p\in Z} |\hat{\phi}_j(2\pi(+2^j p))|^2 = 2^{-j}$;

(vi) I_j 是一个等距算子.

证明 (i)⇔(ii)和(ii)⇔(iii)是显然的.

(iii)⇔(iv). 由 Φ_j 的特征值为

$$\lambda_k = \sum_{l=0}^{2^j-1}\left\langle \phi_j, \phi_j\left(\cdot - \frac{l}{2^j}\right)\right\rangle \sigma_j^{-kl}$$

立即得到.

(iv)⇔(v). 由定理 1.3.1.1 中(iv)⇔(v)的证明过程知,

$$\sum_{p\in Z} |\hat{\phi}_j(2\pi(k+p2^j))|^2 = \frac{1}{2^j}\sum_{l=0}^{2^j-1}\left\langle \phi_j, \phi_j\left(\cdot - \frac{l}{2^j}\right)\sigma_j^{-kl}\right..$$

因此(iv)和(v)等价.

(v)⇔(vi). 同样由定理 1.3.1.1 的证明过程知,

$$\| I_j(\alpha) \|^2 = \sum_{k=0}^{2^j-1} |\hat{\alpha}(k)|^2 \sum_{p\in Z} |\hat{\phi}_j(2\pi(k+p2^j))|^2.$$

因此根据离散的 Parseval 等式知，

$$\| I_j(\alpha) \|^2 = 2^j \sum_{k=0}^{2^j-1} |\alpha(k)|^2 \sum_{p\in Z} |\hat{\phi}_j(2\pi(p+2^j\alpha))|^2. \tag{1.3.5}$$

公式(1.3.5)表明(v)与(vi)等价. 证毕.

对于给定尺度函数序列为$\{\phi_j\}_{j\in Z_+}$的 PMRA$\{V_j\}_{j\in Z_+}$，我们可找到尺度函数序列$\{\phi_j^*\}_{j\in Z_+}$使定义 1.2.1.2 中的(iii)* 成立，如下命题所示：

命题 1.3.1.2 设$\{V_j\}_{j\in Z_+}$是一个 PMRA, $\phi_j \in V_j$ 使 $\left\{\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\middle| =0,\cdots,2^j-1\right\}$为 V_j 的基，则存在 $\phi_j^* \in V_j$ 使 $\left\{\phi_j^*\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\middle| k=0,\cdots,2^j-1\right\}$构成 V_j 的标准正交基.

证明 因为$\left\{\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\middle| k=0,\cdots,2^j-1\right\}$为一线性无关系，所以由定理 1.3.1.1 知，$\forall k=0,\cdots,2^j-1$,

$$\sum_{p\in Z} |\hat{\phi}_j(2\pi(k+p2^j))|^2 > 0. \tag{1.3.6}$$

定义 ϕ_j^* 如下：

$$\hat{\phi}_j^*(2\pi n) = \hat{\phi}_j(2\pi n)\hat{\eta}(n),$$

这里 $\hat{\eta}(n) = \left(2^j \sum_{p\in Z} |\hat{\phi}_j(2\pi(n+p2^j))|^2\right)^{-\frac{1}{2}}, n \in Z$. 公式(1.3.6)表明 $\hat{\eta}(n)$是有定义的. 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{n\in Z} |\hat{\phi}_j^*(2\pi n)|^2 &= \sum_{n\in Z} |\hat{\phi}_j(2\pi n)|^2 |\hat{\eta}(n)|^2 \\ &= \sum_{n\in Z} \frac{|\hat{\phi}_j(2\pi n)|^2}{2^j \sum_{p\in Z} |\hat{\phi}_j(2\pi(n+p2^j))|^2} \\ &\leqslant \frac{1}{2^j} < +\infty,\end{aligned}$$

所以$\{\hat{\phi}_j^*(2\pi n)\}_n \in l^2(Z)$. 由 Riesz-Fisher 定理知，它是一个函数

ϕ_j^* 的 Fourier 系数序列. 由表示式

$$V_j = \{f \in L^2([0,1]) \mid \hat{f}(2\pi n) = \hat{\phi}_j(2\pi n) m_j(n),$$
$$\{m_j(n)\}_{n=0}^{2^j-1} \text{ 是一个周期为 } 2^j \text{ 的序列}\}$$

知, $\left\{\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right) \middle| k=0,\cdots,2^j-1\right\}$ 和 $\left\{\phi_j^*\left(x-\frac{k}{2^j}\right) \middle| k=0,\cdots,2^j-1\right\}$ 生成同一空间 V_j.

另一方面,

$$\sum_{p\in Z} |\hat{\phi}_j^*(2\pi(k+p2^j))|^2 = \frac{1}{2^j},$$

因此由推论 1.3.1.1 知, $\left\{\phi_j^*\left(x-\frac{k}{2^j}\right) \middle| k=0,\cdots,2^j-1\right\}$ 为标准正交系. 证毕.

1.3.2 稠密性的判断

假设 $\{V_j\}_{j\in Z_+}$ 是 $L^2([0,1])$ 的一单增闭子空间列且 V_j 为函数 ϕ_j 的 $\frac{1}{2^j}$ 的平移生成. 在这一节中, 我们将给出 $\overline{\bigcup_{j\in Z_+} V_j}$ 在 $L^2([0,1])$ 中稠密的充要条件. 我们首先给出两个辅助性结果.

引理 1.3.2.1 假设 $\sum_{n\in Z} a(n)$ 绝对收敛且对 $k=0,\cdots,2^j-1 (j\in Z^+)$,

$$\sum_{p\in Z} a(k+2^j p) = 0, \tag{1.3.7}$$

那么 $a(n)=0, n\in Z$.

证明 任给 $\alpha\in Z$, 我们有下列断言:

$$\forall j \in Z_+, \sum_{\beta\in Z} a(\alpha+2^j\beta) = 0. \tag{1.3.8}$$

事实上, $\alpha = 2^j\gamma + k, \gamma\in Z, k=0,\cdots,2^j-1$. 所以由(1.3.7)式知,

$$\sum_{\beta\in Z} a(\alpha+2^j\beta) = \sum_{\beta\in Z} a(k+2^j\gamma+2^j\beta)$$

$$= \sum_{\beta \in Z} a(k + 2^j \beta) = 0.$$

断言获证.

因为 $\sum_{\alpha \in Z} |a(\alpha)|$ 收敛, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$(正整数), 使 $\sum_{|\gamma| \geqslant N} |a(\gamma)| \leqslant \varepsilon$. 取 j 充分大使 $2^j - |\alpha| \geqslant N$. 则由(1.3.8)式知,

$$\begin{aligned} a(\alpha) &= \Big| \sum_{\beta \in Z} a(\alpha + 2^j \beta) - \sum_{\beta \in Z \setminus \{0\}} a(\alpha + 2^j \beta) \Big| \\ &= \Big| \sum_{\beta \in Z \setminus \{0\}} a(\alpha + 2^j \beta) \Big|. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

令 $\gamma = \alpha + 2^j \beta, \beta \neq 0$, 则 $|\gamma| \geqslant |2^j \beta| - |\alpha| \geqslant 2^j - |\alpha| \geqslant N$. 因此由(1.3.9)式知,

$$|a(\alpha)| \leqslant \Big| \sum_{|\gamma| \geqslant N} a(\gamma) \Big| \leqslant \sum_{|\gamma| \geqslant N} |a(\gamma)| \leqslant \varepsilon.$$

故 $a(\alpha) = 0$. 证毕.

引理 1.3.2.2 设 V 是 $L^2([0,1])$ 的一个子空间且对 $j \in Z_+$,

$$f(x) \in V \Rightarrow f\left(x - \frac{1}{2^j}\right) \in V. \tag{1.3.10}$$

给定 $\phi \in L^2([0,1])$. 那么对所有 $f \in V$

$$\langle f, \phi \rangle = 0 \tag{1.3.11}$$

当且仅当对所有 $n \in Z, f \in V$,

$$\hat{f}(2\pi n) \overline{\hat{\phi}}(2\pi n) = 0. \tag{1.3.12}$$

证明 由 Parseval 等式知,

$$\langle f, \phi \rangle = \sum_{n \in Z} \hat{f}(2\pi n) \overline{\hat{\phi}}(2\pi n).$$

因此(1.3.12)⇒(1.3.11).

反过来,假设(1.3.11)成立. 由(1.3.10)知,对 $j \in Z_+, l = 0, \cdots, 2^j - 1$,我们有

$$0 = \left\langle f\left(\cdot - \frac{l}{2^j}\right), \phi \right\rangle$$

$$= \sum_{n\in Z}\hat{f}(2\pi n)\,\bar{\hat{\phi}}(2\pi n)\sigma_j^{-ln}$$

$$= \sum_{k=0}^{2^j-1}\sum_{p\in Z}\hat{f}(2\pi(k+2^jp))\,\bar{\hat{\phi}}(2\pi(k+2^jp))\sigma_j^{-ln}. \quad (1.3.13)$$

在(1.3.13)两边取逆有限 Fourier 变换得

$$\sum_{p\in Z}\hat{f}(2\pi(k+2^jp))\,\bar{\hat{\phi}}(2\pi(k+2^jp)) = 0. \qquad (1.3.14)$$

这里 $j\in Z_+$, $k=0,\cdots,2^j-1$. 注意到级数 $\sum_{n\in Z}\hat{f}(2\pi n)\,\bar{\hat{\phi}}(2\pi n)$ 绝对收敛,所以由引理 1.3.2.1 和(1.3.14)式知,(1.3.12)式成立. 证毕.

现在我们陈述本节主要结果如下:

定理 1.3.2.1 假设 V 为 $L^2([0,1])$的一子空间且(1.3.10)成立. 那么

$$\bar{V} = L^2([0,1]) \qquad (1.3.15)$$

当且仅当

$$\bigcap_{f\in V}\{n\in Z \mid \hat{f}(2\pi n)=0\} = \varnothing. \qquad (1.3.16)$$

证明 充分性. 假设(1.3.16)式成立. 我们仅需要证明如果 $\phi\in L^2([0,1])$且 $\phi\perp V$,那么 $\phi=0$ 即可.

若 $\phi\in L^2([0,1])$且 $\phi\perp V$,则由引理 1.3.2.2 知,

$$\hat{f}(2\pi n)\,\bar{\hat{\phi}}(2\pi n) = 0, \quad n\in Z, \quad f\in V. \qquad (1.3.17)$$

然而,由(1.3.16)式知,对任意 $n_0\in Z$,存在 $f\in V$,使得 $\hat{f}(2\pi n_0)\neq 0$. 从而由(1.3.17)式知,$\hat{\phi}(2\pi n_0)=0$. 由于 n_0 为任意一个整数,因此 $\phi=0$.

必要性. 用反证法. 假设(1.3.16)式不成立,那么存在 $n_0\in Z$ 使得 $\forall f\in V$, $\hat{f}(2\pi n_0)=0$,即

$$\langle f, e^{i2\pi n_0\cdot}\rangle = 0, \quad f\in V \qquad (1.3.18)$$

注意到 $\bar{V}=L^2([0,1])$及内积的连续性,所以(1.3.18)式对所有 $f\in L^2([0,1])$均成立. 特别取 $f(x)=e^{i2\pi n_0 x}$时也成立. 此时(1.3.18)式左端为 1,而右端为 0,矛盾. 证毕.

推论 1.3.2.1 假设$\{V_j\}_{j\in Z_+}$为 $L^2([0,1])$的一列闭子空间

且满足定义 1.2.1.1 中的条件(i)和(iii).那么

$$\overline{\bigcup_{j\in Z_+} V_j} = L^2([0,1])$$

当且仅当

$$\bigcap_{j\in Z_+}\{n\in Z \mid \hat{\phi}_j(2\pi n)=0\}=\varnothing.$$

证明 令 $V=\bigcup_{j\in Z_+} V_j$,则 V 满足定理 1.3.2.1 的条件.又注意到

$$\bigcap_{f\in V}\{n\in Z \mid \hat{f}(2\pi n)=0\}=\bigcap_{j\in Z_+}\{n\in Z \mid \hat{\phi}_j(2\pi n)=0\},$$

所以由定理 1.3.2.1 知,结论立即得证.

§1.4 正交 PMRA 的特征

假设 $\{V_j\}_{j\in Z_+}$ 是 $L^2([0,1])$ 的一个 OPMRA, $\{\phi_j\}_{j\in Z_+}$ 是这个 OPMRA 的尺度函数序列.那么 $\left\{\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$ 的标准正交性蕴含着

$$\sum_{n\in Z}\left|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+n2^j))\right|^2=1, \tag{1.4.1}$$

其中 $k=0,\cdots,2^j-1$, $\phi_j^{\#}=2^{\frac{j}{2}}\phi_j$.根据(1.4.1)式,

$$\left|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi n)\right|\leqslant 1,\quad \forall\, n\in Z. \tag{1.4.2}$$

由(1.2.1)式,

$$\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi n)=m_{j+1}^{\#}\hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi n),\quad \forall\, n\in Z, \tag{1.4.3}$$

这里 $m_{j+1}^{\#}(n)=2^{-\frac{1}{2}}m_{j+1}(n)$.

从(1.4.1)式和(1.4.3)式知,对 $k\in\{0,1,2,\cdots,2^{j-1}\}$,

$$\begin{aligned}1&=\sum_{n\in Z}\left|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^jn))\right|^2\\&=\sum_{n\in Z}\left|m_{j+1}^{\#}(k+2^jn)\right|^2\left|\hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi(k+2^jn))\right|^2\\&=\sum_{n奇}+\sum_{n偶}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n\in Z} \left| m_{j+1}^{\#}(k + 2^{j+1}n) \right|^2 \left| \hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi(k + 2^{j+1}n)) \right|^2$$

$$+ \sum_{n\in Z} \left| m_{j+1}^{\#}(k + 2^{j+1}n + 2^j) \right|^2 \left| \hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi(k + 2^{j+1}n + 2^j)) \right|^2$$

$$= \left| m_{j+1}^{\#}(k) \right|^2 \sum_{n\in Z} \left| \hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi(k + 2^{j+1}n)) \right|^2$$

$$+ \left| m_{j+1}^{\#}(k + 2^j) \right|^2 \sum_{n\in Z} \left| \hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi(k + 2^{j+1}n + 2^j)) \right|^2$$

$$= \left| m_{j+1}^{\#}(k) \right|^2 + \left| m_{j+1}^{\#}(k + 2^j) \right|^2, \tag{1.4.4}$$

这里我们使用了序列$\{m_{j+1}(n)\}_{n\in Z}$的周期性.(1.4.4)式表明

$$\left| m_{j+1}^{\#}(2\pi n) \right| \leqslant 1, \quad 对\ n \in Z. \tag{1.4.5}$$

作为(1.4.3)和(1.4.5)两式的直接推论,我们得到

$$\left| \hat{\phi}_j^{\#}(2\pi n) \right| \leqslant \left| \hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi n) \right|, \quad 对 \quad n \in Z.$$

所以序列$\{ | \hat{\phi}_j^{\#}(2\pi n) | \}_{j=0}^{+\infty}$是单增的($j$ 趋于$+\infty$).这样,由(1.4.2)式知极限$\lim\limits_{j\to+\infty} | \hat{\phi}_j^{\#}(2\pi n) |$是存在的.

定理 1.4.1 设$\{V_j\}_{j\in Z_+}$是$L^2([0,1])$的一个闭子空间列,且存在$\phi_j \in V_j$使$\left\{ \phi_j\left(x - \frac{l}{2^j}\right) \right\}_{l=0}^{2^j-1}$为$V_j$的标准正交基.那么$\overline{\bigcup_{j\in Z_+} V_j} = L^2([0,1])$当且仅当

$$\lim_{j\to+\infty} \left| \hat{\phi}_j^{\#}(2\pi n) \right| = 1, \quad n \in Z, \tag{1.4.6}$$

其中$\phi_j^{\#} = 2^{\frac{j}{2}} \phi_j$.

证明

充分性.假设(1.4.6)式成立.我们需要证明$\bigcup_{j\in Z_+} V_j$在$L^2([0,1])$中稠密.

由推论 1.3.2.1 知,只需证对$n\in Z$,存在一个$j\in Z_+$,使得$\hat{\phi}_j(2\pi n)\neq 0$即可.

事实上,因为$\lim\limits_{j\to+\infty} | \hat{\phi}_j^{\#}(2\pi n) | = 1$, $n\in Z$,所以存在$j\in Z_+$,使得$\hat{\phi}_j(2\pi n)\neq 0$.

必要性.假设$\overline{\bigcup_{j\in Z_+} V_j}=L^2([0,1])$,我们需要证明(1.4.6)式成立.

让 P_j 为到 V_j 的正交投影.那么稠密性和 $V_j\subset V_{j+1}$蕴含

$$\lim_{j\to+\infty}\|P_jf-f\|=0,\quad f\in L^2([0,1]).\tag{1.4.7}$$

固定 $m\in Z$.在(1.4.7)式中,取 $f(x)=e^{i2\pi mx}$.显然,此时 $f(x)=e^{i2\pi mx}\in L^2([0,1])$且$\|f\|=1$.因此对 $\varepsilon>0$,存在 $j_0\in Z$,使得

$$\|P_jf-f\|<\varepsilon,\quad j\geqslant j_0.\tag{1.4.8}$$

因此由(1.4.8)式知,

$$1=\|f\|\leqslant\|P_jf\|+\|f-P_jf\|<\|P_jf\|+\varepsilon,$$

即

$$\|P_jf\|>1-\varepsilon\quad j\geqslant j_0.\tag{1.4.9}$$

但是,因为$\left\{\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$为 V_j 的标准正交基,所以

$$P_jf(x)=\sum_{k=0}^{2^j-1}<f,\phi_j\left(\cdot-\frac{k}{2^j}\right)>\phi_j\left(x-\frac{k}{2^j}\right).$$

由 Parseval 等式知,

$$\begin{aligned}\|P_jf\|^2&=\sum_{k=0}^{2^j-1}\left|\left\langle f,\phi_j\left(\cdot-\frac{k}{2^j}\right)\right\rangle\right|^2\\&=\sum_{k=0}^{2^j-1}\left|\sum_{n\in Z}\hat{f}(2\pi n)\overline{\hat{\phi}_j(2\pi n)}e^{i2\pi n2^{-j}k}\right|^2\\&=2^j\sum_{n\in Z}\left|\hat{f}(2\pi n)\overline{\hat{\phi}_j(2\pi n)}\right|^2\\&=\sum_{n\in Z}\left|\hat{f}(2\pi n)\overline{\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi n)}\right|^2,\end{aligned}\tag{1.4.10}$$

注意到$\hat{f}(2\pi n)=\delta_{n,m}$(因为 $f(x)=e^{im2\pi x}$),因此从(1.4.10)式,我们得到

$$\|P_jf\|^2=\left|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi m)\right|^2.\tag{1.4.11}$$

由(1.4.9)和(1.4.11)两式知,

$$(1-\varepsilon)^2 < \| P_j f \|^2 = |\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi m)|^2,$$

这表明

$$\varliminf_{j\to+\infty} |\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi m)| \geqslant 1. \tag{1.4.12}$$

但由(1.4.2)式知,对 $m\in Z$,

$$\varlimsup_{j\to+\infty} |\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi m)| \leqslant 1. \tag{1.4.13}$$

所以由(1.4.12)和(1.4.13)两式推出

$$\lim_{j\to+\infty} |\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi m)| = 1.$$

证毕.

给定 $\{\phi_j(x) \mid j\in Z_+\}\subset L^2([0,1])$,定义闭子空间 $V_j(j\in Z_+)$:

$$V_j := \operatorname{span}\left\{\phi_j\left(t-\frac{k}{2^j}\right)\,\middle|\, k=0,\cdots,2^j-1\right\}.$$

那么 $\{V_j\}_{j\in Z_+}$ 构成 $L^2([0,1])$ 的一个正交 PMRA 的充分必要条件是什么? 对此我们有

定理 1.4.2 函数列 $\{\phi_j \mid j\in Z_+\}$ 是 $L^2([0,1])$ 的一个 OPMRA $\{V_j \mid j\in Z_+\}$ 的尺度函数列当且仅当对 $j\in Z_+$

$$\sum_{n\in Z} |\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j n))|^2 = 1, \quad k\in\{0,\cdots,2^j-1\}, \tag{1.4.14}$$

$$\lim_{j\to+\infty} |\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi n)| = 1, \quad n\in Z, \tag{1.4.15}$$

$$\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi n) = m_{j+1}^{\#}(n)\hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi n), \quad n\in Z, \tag{1.4.16}$$

其中 $\phi_j^{\#} = 2^{\frac{j}{2}}\phi_j$, $m_{j+1}^{\#} = 2^{-\frac{1}{2}} m_{j+1}$, $\{m_{j+1}(n)\}_n$ 是 $2^{j+1}Z$-周期序列.

证明 必要性.若 $\{\phi_j\}_{j\in Z_+}$ 为一个 OPMRA 的尺度函数列,则由(1.2.1)式,(1.4.1)式及定理 1.4.1 知,(1.4.14),(1.4.15)和(1.4.16)三式成立.

充分性.在(1.4.14),(1.4.15)和(1.4.16)三式成立下,显然,

$$V_j := \operatorname{span}\left\{\phi_j\left(\cdot-\frac{k}{2^j}\right)\right\}_{k=0}^{2^j-1}$$

是一个 OPMRA,其尺度函数列为$\{\phi_j\}_{j\in Z_+}$. 证毕.

推论 1.4.1 如果$\{\phi_j^1\}_{j\in Z_+}$是 $L^2([0,1])$的一个 OPMRA 的尺度函数列,那么由 $\hat{\phi}_j^2=|\hat{\phi}_j^1|$定义的 ϕ_j^2 也是同一个 OPMRA 的尺度函数列.

证明 由定理 1.4.2 立即得到.

推论 1.4.2 如果$\{\phi_j\}_{j\in Z_+}$是 $L^2([0,1])$的一个 OPMRA 的尺度函数列,那么对 $k\in Z_+$,

$$\lim_{j\to+\infty}\sum_{n\in Z\setminus\{0\}}|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^jn))|^2=0.$$

证明 固定 $k\in Z_+$. 让 j 充分大,使得 $k<2^j$,那么

$$\begin{aligned}1&=\sum_{\alpha\in Z}|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2\\&=\sum_{\alpha\in Z\setminus\{0\}}|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2+|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi k)|^2.\end{aligned}\tag{1.4.17}$$

由 $\lim\limits_{j\to+\infty}|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi k)|=1$ 和(1.4.17)式知,

$$\lim_{j\to+\infty}\sum_{\alpha\in Z\setminus\{0\}}|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2=0.$$

证毕.

定理 1.4.3 让$\{\phi_j^1\}_{j\in Z_+}$,$\{\phi_j^2\}_{j\in Z_+}$是 $L^2([0,1])$的两个正交尺度函数列. 如果对 $k\in\{0,\cdots,2^j-1\}$,

$$\sum_{\alpha\in Z}|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2>0,\tag{1.4.18}$$

那么由

$$\hat{\phi}_j(2\pi n)=\frac{2^{\frac{j}{2}}\hat{\phi}_j^1(2\pi n)\hat{\phi}_j^2(2\pi n)}{\left(\sum\limits_{\alpha\in Z}|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

其中 $n\equiv k \mod 2^j, 0\leqslant k\leqslant 2^j-1$ 定义的 ϕ_j 也是$L^2([0,1])$的一个正交尺度函数列,当然,$\phi_j^{1\#}=2^{\frac{j}{2}}\phi_j^1$, $\phi_j^{2\#}=2^{\frac{j}{2}}\phi_j^2$.

证明 由(1.4.1)式知,对 $k\in\{0,\cdots,2^j-1\}$,

$$\sum_{\alpha\in Z}|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2=\sum_{\alpha\in Z}|\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2=1.$$

所以由 Schwarz 不等式知,

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\in Z}|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|\\ \leqslant&\Big(\sum_{\alpha\in Z}|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\\ &\Big(\sum_{\alpha\in Z}|\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\ =&1.\end{aligned}$$

因此由(1.4.18)式知,$\hat{\phi}_j$ 的定义是合理的且对 $k\in\{0,\cdots,2^j-1\}$,

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\in Z}|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2\\ =&\sum_{\alpha\in Z}|2^{\frac{j}{2}}\hat{\phi}_j(2\pi(k+2^j\alpha))|^2\\ =&\sum_{\alpha\in Z}\frac{|2^{\frac{j}{2}}2^{\frac{j}{2}}\hat{\phi}_j^1(2\pi(k+2^j\alpha))\hat{\phi}_j^2(2\pi(k+2^j\alpha))|^2}{\sum_{\beta\in Z}|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\beta))\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\beta))|^2}\\ =&\frac{\sum_{\alpha\in Z}|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2}{\sum_{\beta\in Z}|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\beta))\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\beta))|^2}\\ =&1.\end{aligned}\tag{1.4.19}$$

对固定的 $k\in Z_+$,让 $2^j>k$.那么推论 1.4.2 告诉我们

$$\begin{aligned}&\lim_{j\to+\infty}\sum_{\alpha\in Z\setminus\{0\}}|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2\\ \leqslant&\lim_{j\to+\infty}\sum_{\alpha\in Z\setminus\{0\}}|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^2\\ =&0.\end{aligned}\tag{1.4.20}$$

注意到对 ϕ_j^1 和 ϕ_j^2,由定理 1.4.2 知,对 $n\in Z$,

$$\lim_{j\to+\infty}|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi n)\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi n)|^2=1,\quad n\in Z.\tag{1.4.21}$$

因而,从(1.4.20)式和(1.4.21)式知,对 $k\in Z_+$,我们有

$$\lim_{j\to+\infty}\sum_{\alpha\in Z}\left|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\right|^2=1.$$

所以对 $n\in Z$ 且假设 $n\equiv k \bmod 2^j$，有

$$\begin{aligned}&\lim_{j\to+\infty}\left|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi n)\right|^2\\&=\lim_{j\to+\infty}\left|2^{\frac{j}{2}}\hat{\phi}_j(2\pi n)\right|^2\\&=\lim_{j\to+\infty}\frac{\left|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi n)\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi n)\right|^2}{\sum_{\beta\in Z}\left|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\beta))\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\beta))\right|^2}\\&=1.\end{aligned}\tag{1.4.22}$$

假设 $\{m_{j+1}^1(n)\}_n$ 和 $\{m_{j+1}^2(n)\}_n$ 分别是对应 $\{\phi_j^1\}_{j\in Z_+}$ 和 $\{\phi_j^2\}_{j\in Z_+}$ 的 $2^{j+1}Z$-周期序列.那么对 $n\in Z$

$$\hat{\phi}_j^1(2\pi n)=m_{j+1}^1(n)\hat{\phi}_{j+1}^1(2\pi n),$$

$$\hat{\phi}_j^2(2\pi n)=m_{j+1}^2(n)\hat{\phi}_{j+1}^2(2\pi n).$$

因此对 $n\in Z$，我们可以假设 $n\equiv k \bmod 2^j$，$0\leqslant k\leqslant 2^j-1$ 和 $n\equiv l \bmod 2^{j+1}$，$0\leqslant l\leqslant 2^{j+1}-1$. 这样，

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_j(2\pi n)&=\frac{2^{\frac{j}{2}}\hat{\phi}_j^1(2\pi n)\hat{\phi}_j^2(2\pi n)}{\left(\sum_{\beta\in Z}\left|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\beta))\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\beta))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}\\&=m_{j+1}^1(n)m_{j+1}^2(n)\\&\quad\times\frac{2^{-\frac{1}{2}}2^{\frac{j+1}{2}}\hat{\phi}_{j+1}^1(2\pi n)\hat{\phi}_{j+1}^2(2\pi n)}{\left(\sum_{\beta\in Z}\left|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\beta))\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\beta))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}\\&=2^{-\frac{1}{2}}m_{j+1}^1(n)m_{j+1}^2(n)\hat{\phi}_{j+1}(2\pi n)\\&\quad\times\frac{\left(\sum_{\alpha\in Z}\left|\hat{\phi}_{j+1}^{1\#}(2\pi(l+2^j\alpha))\hat{\phi}_{j+1}^{2\#}(2\pi(l+2^j\alpha))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{\beta\in Z}\left|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\beta))\hat{\phi}_j^{2\#}(2\pi(k+2^j\beta))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

$$= m_{j+1}(n)\hat{\phi}_{j+1}(2\pi n), \tag{1.4.23}$$

其中

$$m_{j+1}(n) = 2^{-\frac{1}{2}} m_{j+1}^{1}(n) m_{j+1}^{2}(n) \times \frac{\left(\sum_{\alpha\in Z} \left|\hat{\phi}_{j+1}^{1\#}(2\pi(l+2^j\alpha))\hat{\phi}_{j+1}^{2\#}(2\pi(l+2^j\alpha))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{\beta\in Z} \left|\hat{\phi}_{j}^{1\#}(2\pi(k+2^j\beta))\hat{\phi}_{j}^{2\#}(2\pi(k+2^j\beta))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

对 $\{\phi_j\}_{j\in Z_+}$，我们需要表明(1.4.16)式成立. 由(1.4.23)式知，充分地只需证 $\{m_{j+1}(n)\}_n$ 是一个 $2^{j+1}Z$-周期序列即可.

事实上，对 $n\in Z$，假设 $n = k + 2^j\alpha_0 = l + 2^{j+1}\beta_0, \alpha_0, \beta_0\in Z$，$0\leqslant k\leqslant 2^j - 1, 0\leqslant l\leqslant 2^{j+1}-1$. 那么

$$n + 2^{j+1} = k + 2^j(\alpha_0 + 2) = l + 2^{j+1}(\beta_0 + 1).$$

因此

$$\begin{aligned} m_{j+1}(n + 2^{j+1}) &= 2^{-\frac{1}{2}} m_{j+1}^{1}(n + 2^{j+1}) m_{j+1}^{2}(n + 2^{j+1}) \\ &\quad\times \frac{\left(\sum_{\alpha\in Z} \left|\hat{\phi}_{j+1}^{1\#}(2\pi(l+2^j\alpha))\hat{\phi}_{j+1}^{2\#}(2\pi(l+2^j\alpha))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{\beta\in Z} \left|\hat{\phi}_{j}^{1\#}(2\pi(k+2^j\beta))\hat{\phi}_{j}^{2\#}(2\pi(k+2^j\beta))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= 2^{-\frac{1}{2}} m_{j+1}^{1}(n) m_{j+1}^{2}(n) \\ &\quad\times \frac{\left(\sum_{\alpha\in Z} \left|\hat{\phi}_{j+1}^{1\#}(2\pi(l+2^j\alpha))\hat{\phi}_{j+1}^{2\#}(2\pi(l+2^j\alpha))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{\beta\in Z} \left|\hat{\phi}_{j}^{1\#}(2\pi(k+2^j\beta))\hat{\phi}_{j}^{2\#}(2\pi(k+2^j\beta))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= m_{j+1}(n). \end{aligned}$$

所以由定理 1.4.2,(1.4.19)式,(1.4.22)式和(1.4.23)式知，$\{\phi_j\}_{j\in Z_+}$ 是一个正交尺度函数列. 证毕.

特别，当 $\phi_j^1 = \phi_j^2$ 时，我们有

推论 1.4.3 假设 $\{\phi_j^1\}_{j\in Z_+}$ 是 $L^2([0,1])$ 的一个 OPMRA

的尺度函数列.那么由

$$\hat{\phi}_j^2(2\pi n) = 2^{\frac{j}{2}}(\hat{\phi}_j^1(2\pi n))^2\Big(\sum_{\alpha\in Z}|\hat{\phi}_j^{1\#}(2\pi(k+2^j\alpha))|^4\Big)^{-\frac{1}{2}},$$

$n\equiv k \bmod 2^j, 0\leqslant k\leqslant 2^j-1$,定义的 ϕ_j^2 也是 $L^2([0,1])$的一个尺度函数列.

§1.5 尺度函数和小波的构造

同直线上的情形一样,构造周期尺度函数和周期小波是从滤波函数列$\{\{m_j(n)\}_n\}_{j\geqslant 1}$出发.由命题1.3.1.2知,我们仅需要给出周期正交尺度函数和周期正交小波的构造过程.这样我们在下面就考虑正交情形.

1.5.1 尺度函数的构造

由§1.4知,(1.4.1)式和(1.4.4)式是一个尺度函数序列为$\{\phi_j\}_{j\in Z_+}$的 OPMRA$\{V_j\}_{j\in Z_+}$的必要条件且对 $\alpha\in Z$ 和$j\in Z_+$有

$$\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi\alpha) = \prod_{s=j+1}^{J} m_s^{\#}(\alpha)\hat{\phi}_J^{\#}(2\pi\alpha). \qquad (1.5.1)$$

因此,我们下面的出发点是假设$\{\{m_j(n)\}_n\}_{j\geqslant 1}$是给定的滤波函数族,对固定的 j, $\{m_j(n)\}_n$ 是 2^jZ-周期序列.形式上定义

$$\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi\alpha) = \prod_{s=j+1}^{+\infty} m_s^{\#}(\alpha). \qquad (1.5.2)$$

为了保证(1.5.2)式中无穷乘积收敛,我们必须对$\{m_j(\alpha)\}_\alpha$ 施加条件,例如,$m_j^{\#}(\alpha)=1+O(2^{-\epsilon j})$,对每个 α 不必一致收敛,便是充分条件.另外,将 $\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi\alpha)$的定义和(1.5.1)式比较起来,我们需要假设下列条件:

$$\lim_{J\to+\infty}\hat{\phi}_J^{\#}(2\pi\alpha) = 1, \quad \forall\alpha\in Z \qquad (1.5.3)$$

但由定理1.4.1知,条件(1.5.3)对一个 OPMRA 来说是必要的.因此(1.5.3)的假设是合理的.

现在我们来刻画上述定义的 $\phi_j^{\#}$ 什么时候使

$$\left\{\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\Big|\, l=0,\cdots,2^j-1\right\}$$

构成

$$V_j=\operatorname{span}\left\{\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\Big|\, l=0,\cdots,2^j-1\right\}$$

的标准正交基,其中 $\phi_j=2^{-\frac{j}{2}}\phi_j^{\#}$. 我们将考虑包含正交情形的双正交情形. 再给定另一个滤波函数族$\{\{\widetilde{m}_j(n)\}_n\}_{j\geqslant 1}$,且对固定的 j,$\{\widetilde{m}_j(n)\}_n$ 是 2^jZ-周期序列. 进一步,假设下列条件成立:

$$\hat{\widetilde{\phi}}_j^{\#}(2\pi\alpha)=\prod_{s=j+1}^{+\infty}\widetilde{m}_s^{\#}(\alpha)$$

是收敛的,$\lim\limits_{J\to+\infty}\hat{\widetilde{\phi}}_J^{\#}(2\pi\alpha)=1(\alpha\in Z)$及 $m_j(n)$, $\widetilde{m}_j(n)$满足对 $k=0,\cdots,2^j-1$,

$$\overline{m}_{j+1}^{\#}(k)\widetilde{m}_{j+1}^{\#}(k)+\overline{m}_{j+1}^{\#}(k+2^j)\widetilde{m}_{j+1}^{\#}(k+2^j)=1. \tag{1.5.4}$$

(1.5.4)式正是(1.4.4)式在双正交情形下的类似. 那么我们的结果是:

定理 1.5.1.1 上面定义的 ϕ_j 和 $\widetilde{\phi}_j$ 双正交,即

$$\left\langle\phi_j,\widetilde{\phi}_j\left(\cdot-\frac{l}{2^j}\right)\right\rangle=\delta_{0,l} \tag{1.5.5}$$

当且仅当存在正常数 C 使得对任意$k=0,\cdots,2^j-1$,有

$$\theta_j^{\#}(k)=\sum_{\alpha\in Z}\left|\overline{\hat{\phi}_j^{\#}}(2\pi(k+2^j\alpha))\,\hat{\widetilde{\phi}}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\right|\geqslant C. \tag{1.5.6}$$

为了说明定理 1.5.1.1,我们首先建立如下几个引理.

引理 1.5.1.1 设 $j\in Z_+$,ϕ_j, $\widetilde{\phi}_j\in L^2([0,1])$. 那么

(i) (1.5.5)式成立当且仅当对任意 $k=0,\cdots,2^j-1$,

$$2^j\sum_{\alpha\in Z}\overline{\hat{\phi}_j}(2\pi(k+2^j\alpha))\,\hat{\widetilde{\phi}}_j(2\pi(k+2^j\alpha))=1 \tag{1.5.7}$$

(ii) $\left\langle \phi_j, \widetilde{\phi}_j\left(\cdot - \frac{l}{2^j}\right)\right\rangle = 0 (l=0,\cdots,2^j-1)$当且仅当(1.5.7)式左边的和等于 0.

证明 首先,由 Parseval 公式,我们有下列等式:

$$\sum_{l=0}^{2^j-1}\int_0^1 \phi_j(x)\,\overline{\widetilde{\phi}_j}\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\mathrm{d}x\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi 2^{-j}})^{-lk}$$

$$=\sum_{l=0}^{2^j-1}\sum_{n\in Z}\hat{\phi}_j(2\pi n)\,\overline{\hat{\widetilde{\phi}}_j}(2\pi n)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi 2^{-j}})^{l(n-k)}$$

$$=\sum_{l,s=0}^{2^j-1}\sum_{n\in Z}\hat{\phi}_j(2\pi(s+2^jn))\,\overline{\hat{\widetilde{\phi}}_j}(2\pi(s+2^jn))(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi 2^{-j}})^{l(2^jn+s-k)}$$

$$=2^j\sum_{n\in Z}\hat{\phi}_j(2\pi(k+2^jn))\,\overline{\hat{\widetilde{\phi}}_j}(2\pi(k+2^jn)). \tag{1.5.8}$$

如果(1.5.5)式成立,那么由(1.5.8)式知,

$$2^j\sum_{n\in Z}\hat{\phi}_j(2\pi(k+2^jn))\,\overline{\hat{\widetilde{\phi}}_j}(2\pi(k+2^jn))$$

$$=\sum_{l=0}^{2^j-1}\delta_{0,l}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi 2^{-j}})^{lk}=1,$$

即(1.5.7)式成立.

反之,假设(1.5.7)式成立,那么由(1.5.8)式知,

$$\sum_{l=0}^{2^j-1}\int_0^1 \phi_j(x)\,\overline{\widetilde{\phi}_j}\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\mathrm{d}x\,(\mathrm{e}^{i2\pi 2^{-j}})^{kl}=1. \tag{1.5.9}$$

置 $c_l=\int_0^1 \phi_j(x)\,\overline{\widetilde{\phi}_j}\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\mathrm{d}x$, $l=0,\cdots,2^j-1$. 那么由(1.5.9)式和 DFT 得, $\hat{c}_k=1$. 使用 IDFT,我们得到

$$c_l=\frac{1}{2^j}\sum_{k=0}^{2^j-1}\hat{c}_k(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi 2^{-j}})^{kl}=\delta_{0,l}.$$

故(1.5.5)式成立. 类似地,可证(ii)成立. 证毕.

引理1.5.1.2 在定理 1.5.1.1 的条件下,对 $J>j+1, J\in Z$ 和 $k\in\{0,\cdots,2^j-1\}$,我们有

$$\sum_{l=0}^{2^j-1}\prod_{i=j+1}^{J} m_i^{\#}(k+2^j l)\,\overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^j l)=1. \quad (1.5.10)$$

证明 令

$$A_J=\sum_{l=0}^{2^{J-j}}\prod_{i=j+1}^{J} m_i^{\#}(k+2^j l)\,\overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^j l).$$

那么由(1.5.4)式知,

$$A_J=\sum_{\beta=0}^{2^{J-j-1}-1}\sum_{\nu=0}^{1}\prod_{i=j+1}^{J} m_i^{\#}(k+2^j(2^{J-j-1}\nu+\beta))$$

$$\times\overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^j(2^{J-j-1}\nu+\beta))$$

$$=\sum_{\beta=0}^{2^{J-j-1}-1}\sum_{\nu=0}^{1}\prod_{i=j+1}^{J-1} m_i^{\#}(k+2^{J-1}\nu+2^j\beta)$$

$$\times\overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\beta+2^{J-1}\nu)$$

$$\times m_J^{\#}(k+2^j\beta+2^{J-1}\nu)\,\overline{\widetilde{m}}_J^{\#}(k+2^j\beta+2^{J-1}\nu)$$

$$=\sum_{\beta=0}^{2^{J-j-1}-1}\prod_{i=j+1}^{J-1} m_i^{\#}(k+2^j\beta)\,\overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\beta)$$

$$\times\Big(\sum_{\nu=0}^{1} m_J^{\#}(k+2^j\beta+2^{J-1}\nu)\,\overline{\widetilde{m}}_J^{\#}(k+2^j\beta+2^{J-1}\nu)\Big)$$

$$=\sum_{\beta=0}^{2^{J-j-1}-1}\prod_{i=j+1}^{J-1} m_i^{\#}(k+2^j\beta)\,\overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\beta)=A_{J-1}.$$

这样,连续使用(1.5.4)式,我们得到

$$A_J=\cdots=A_{j+1}=\sum_{\beta=0}^{1} m_{j+1}^{\#}(k+2^j\beta)\,\overline{\widetilde{m}}_{j+1}^{\#}(k+2^j\beta)=1.$$

证毕.

假设$\{f(k)\}_{k\in Z}$是一个复数序列,$j\in Z_+$.现在我们定义转移算子列 T_{j+1}如下:

定义 1.5.1.1

$$(T_{j+1}f)(k)=\left|m_{j+1}^{\#}(k)\,\overline{\widetilde{m}}_{j+1}^{\#}(k)\right|f(k)$$

$$+\left|m_{j+1}^{\#}(k+2^{j})\,\overline{\widetilde{m}}_{j+1}^{\#}(k+2^{j})\right|f(k+2^{j}).$$

引理1.5.1.3 $T_{j+1}\theta_{j+1}^{\#}(k)=\theta_{j}^{\#}(k).$ (1.5.11)

证明 由 ϕ_j 和 $\widetilde{\phi}_j$ 的定义,我们知道

$$\hat{\phi}_{j}^{\#}(2\pi n)=m_{j+1}^{\#}(n)\hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi n),$$

$$\hat{\widetilde{\phi}}_{j}^{\#}(2\pi n)=\widetilde{m}_{j+1}^{\#}(n)\,\hat{\widetilde{\phi}}_{j+1}^{\#}(2\pi n).$$

使用 $m_{j+1}^{\#}$和 $\widetilde{m}_{j+1}^{\#}$的周期性,我们有

$$\begin{aligned}
&T_{j+1}\theta_{j+1}^{\#}(k)\\
&=\left|m_{j+1}^{\#}(k)\,\overline{\widetilde{m}}_{j+1}^{\#}(k)\right|\theta_{j+1}^{\#}(k)\\
&\quad+\left|m_{j+1}^{\#}(k+2^{j})\,\overline{\widetilde{m}}_{j+1}^{\#}(k+2^{j})\right|\theta_{j+1}^{\#}(k+2^{j})\\
&=\left|m_{j+1}^{\#}(k)\,\overline{\widetilde{m}}_{j+1}^{\#}(k)\right|\\
&\quad\times\sum_{\alpha\in Z}\left|\hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi(k+2^{j+1}\alpha))\,\overline{\hat{\widetilde{\phi}}}_{j+1}^{\#}(2\pi(k+2^{j+1}\alpha))\right|\\
&\quad+\left|m_{j+1}^{\#}(k+2^{j})\,\overline{\widetilde{m}}_{j+1}^{\#}(k+2^{j})\right|\\
&\quad\times\sum_{\alpha\in Z}\left|\hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi(k+2^{j}+2^{j+1}\alpha))\,\overline{\hat{\widetilde{\phi}}}_{j+1}^{\#}(2\pi(k+2^{j}+2^{j+1}\alpha))\right|\\
&=\sum_{\alpha\in Z}\Big|m_{j+1}^{\#}(k+2^{j+1}\alpha)\hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi(k+2^{j+1}\alpha))\\
&\quad\times\overline{\widetilde{m}}_{j+1}^{\#}(k+2^{j+1}\alpha)\,\overline{\hat{\widetilde{\phi}}}_{j+1}^{\#}(2\pi(k+2^{j+1}\alpha))\Big|\\
&\quad+\sum_{\alpha\in Z}\Big|m_{j+1}^{\#}(k+2^{j}+2^{j+1}\alpha)\hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi(k+2^{j}+2^{j+1}\alpha))\\
&\quad\times\overline{\widetilde{m}}_{j+1}^{\#}(k+2^{j}+2^{j+1}\alpha)\,\overline{\hat{\widetilde{\phi}}}_{j+1}^{\#}(2\pi(k+2^{j}+2^{j+1}\alpha))\Big|
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha \in Z} \left| \hat{\phi}_j^{\#} (2\pi(k + 2^j(2\alpha))) \overline{\hat{\tilde{\phi}}_j^{\#}} (2\pi(k + 2^j(2\alpha))) \right|$$

$$+ \sum_{\alpha \in Z} \left| \hat{\phi}_j^{\#} (2\pi(k + 2^j(2\alpha + 1))) \overline{\hat{\tilde{\phi}}_j^{\#}} (2\pi(k + 2^j(2\alpha + 1))) \right|$$

$$= \sum_{\alpha \in Z} \left| \hat{\phi}_j^{\#} (2\pi(k + 2^j\alpha)) \overline{\hat{\tilde{\phi}}_j^{\#}} (2\pi(k + 2^j\alpha)) \right|$$

$$= \theta_j^{\#} (k).$$

证毕.

引理1.5.1.4 对任意 $j \in Z_+$ 和 $J > j + 1$,我们有

$$T_{j+1} T_{j+2} \cdots T_J f(k)$$

$$= \sum_{l=0}^{2^{J-j}-1} \prod_{i=j+1}^{J} \left| m_i^{\#} (k + 2^j l) \overline{\tilde{m}_i^{\#}} (k + 2^j l) \right| f(k + 2^j l), \tag{1.5.12}$$

其中 $\{f(k)\}_{k \in Z}$ 是一个复数列.

证明 我们使用归纳法来证. 当 $J = j + 2$,我们有

$$T_{j+1}(T_{j+2} f(k))$$

$$= T_{j+1}\Big(\left| m_{j+2}^{\#}(k) \overline{\tilde{m}_{j+2}^{\#}}(k) \right| f(k)$$

$$+ \left| m_{j+2}^{\#}(k + 2^{j+1}) \overline{\tilde{m}_{j+2}^{\#}}(k + 2^{j+1}) \right| f(k + 2^{j+1}) \Big)$$

$$= \left| m_{j+1}^{\#}(k) \overline{\tilde{m}_{j+1}^{\#}}(k) \right| \Big[\left| m_{j+2}^{\#}(k) \overline{\tilde{m}_{j+2}^{\#}}(k) \right| f(k)$$

$$+ \left| m_{j+2}^{\#}(k + 2^{j+1}) \overline{\tilde{m}_{j+2}^{\#}}(k + 2^{j+1}) \right| f(k + 2^{j+1}) \Big]$$

$$+ \left| m_{j+1}^{\#}(k + 2^{j+1}) \overline{\tilde{m}_{j+1}^{\#}}(k + 2^j) \right|$$

$$\times \Big[\left| m_{j+2}^{\#}(k + 2^j) \overline{\tilde{m}_{j+2}^{\#}}(k + 2^j) \right| f(k + 2^j)$$

$$+ \left| m_{j+2}^{\#}(k + 2^j + 2^{j+1}) \overline{\tilde{m}_{j+2}^{\#}}(k + 2^j + 2^{j+1}) \right|$$

$$\times f(k + 2^j + 2^{j+1})\Big]$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{2^2-1} \prod_{i=j+1}^{J} \left| m_i^{\#}(k + 2^j\alpha)\, \overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k + 2^j\alpha) \right| f(k + 2^j\alpha),$$

其中最后一个等式来自 $m_i^{\#}$ 和$\widetilde{m}_i^{\#}$ 的周期性.

假设(1.5.12)式对 J 成立.那么我们有

$$T_{j+1}T_{j+2}\cdots T_J T_{J+1} = T_{j+1}T_{j+2}\cdots T_J(T_{J+1}f(k))$$

$$= T_{j+1}T_{j+2}\cdots T_J\Big(\left| m_{J+1}^{\#}(k)\, \overline{\widetilde{m}}_{J+1}^{\#}(k) \right| f(k)$$

$$+ \left| m_{J+1}^{\#}(k + 2^J)\, \overline{\widetilde{m}}_{J+1}^{\#}(k + 2^J) \right| f(k + 2^J)\Big)$$

$$= \sum_{l=0}^{2^{J-j}-1} \prod_{i=j+1}^{J} \left| m_i^{\#}(k + 2^j l)\, \overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k + 2^j l)\right.$$

$$\left.\times\, m_{J+1}^{\#}(k + 2^j l)\, \overline{\widetilde{m}}_{J+1}^{\#}(k + 2^j l) \right| f(k + 2^j l)$$

$$+ \sum_{l=0}^{2^{J-j}-1} \prod_{i=j+1}^{J} \left| m_i^{\#}(k + 2^j l)\, \overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k + 2^j l)\right.$$

$$\left.\times\, m_{J+1}^{\#}(k + 2^j l + 2^J)\, \overline{\widetilde{m}}_{J+1}^{\#}(k + 2^j l + 2^J) \right| f(k + 2^j l + 2^J)$$

$$= \sum_{l=0}^{2^{J-j}-1} \prod_{i=j+1}^{J+1} \left| m_i^{\#}(k + 2^j l)\, \overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k + 2^j l) \right| f(k + 2^j l)$$

$$+ \sum_{s=2^{J-j}}^{2^{J+1-j}-1} \prod_{i=j+1}^{J} \left| m_i^{\#}(k + 2^j s - 2^J)\, \overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k + 2^s - 2^J)\right.$$

$$\left.\times\, m_{J+1}^{\#}(k + 2^s)\, \overline{\widetilde{m}}_{J+1}^{\#}(k + 2^s) \right| f(k + 2^s)$$

$$= \sum_{l=0}^{2^{J+1-j}-1} \prod_{i=j+1}^{J+1} \left| m_i^{\#}(k + 2^j l)\, \overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k + 2^j l) \right| f(k + 2^j l).$$

这里在第四个等式中使用了变换 $s = l + 2^{J-j}$,最后一个等式使用了 $m_i^{\#}$,$\widetilde{m}_i^{\#}$ 的周期性.证毕.

现在我们转向证明定理 1.5.1.1.

定理 1.5.1.1 的证明

必要性. 假设(1.5.5)式成立，那么由引理 1.5.1.1 知，对 $k \in \{0,\cdots,2^j-1\}$，我们有

$$\sum_{\alpha\in Z}\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\overline{\hat{\tilde{\phi}}_j^{\#}}(2\pi(k+2^j\alpha))=1.$$

这表明对任意 $C\leqslant 1$ 的常数 C 和 $k\in\{0,\cdots,2^j-1\}$，

$$\theta_j^{\#}(k)\geqslant\left|\sum_{\alpha\in Z}\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\overline{\hat{\tilde{\phi}}_j^{\#}}(2\pi(k+2^j\alpha))\right|\geqslant C.$$

故(1.5.6)成立.

充分性. 让 $j\in Z_+$，$J>j+1$ 和 $k\in\{0,\cdots,2^j-1\}$. 由引理 1.5.1.2，我们得到

$$\sum_{\alpha=0}^{2^{J-j}-1}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)=1.$$

另外，由 $m_{j+1}^{\#}$，$\overline{\tilde{m}}_{j+1}^{\#}$ 的周期性，

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=0}^{2^{J-j}-1}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\\
=&\sum_{\alpha=0}^{2^{J-j-1}-1}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\\
&+\sum_{\alpha=2^{J-j-1}}^{2^{J-j}-1}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\\
=&\sum_{\alpha=0}^{2^{J-j-1}-1}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\\
&+\sum_{\beta=-2^{J-j-1}}^{-1}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\beta+2^J)\overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\beta+2^J)\\
=&\sum_{\alpha=-2^{J-j-1}}^{2^{J-j-1}-1}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha).\end{aligned}$$

因此让 $\chi_{j,J}(\alpha)$ 是下列集

$$\{-2^{J-j-1}, -2^{J-j-1}+1, \cdots, 2^{J-j-1}-1\}$$

的特征函数,即,

$$\chi_{j,J}(\alpha) = \chi_{\{-2^{J-j-1}, -2^{J-j-1}+1, \cdots, 2^{J-j-1}-1\}}(\alpha).$$

那么

$$\sum_{\alpha\in Z} \prod_{i=j+1}^{J} m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\, \overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha) = 1. \tag{1.5.13}$$

明显地,我们只需证当 $J\to\infty$ 时,(1.5.13)式的左边极限和求和号可交换即可. 事实上,如果我们证明这个结论,那么对 $k\in\{0,\cdots,2^j-1\}$,

$$\sum_{\alpha\in Z}\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\, \overline{\hat{\widetilde{\phi}}}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha)) = 1.$$

因此由引理 1.5.1.1,(1.5.5)式成立.

现在我们证明当 $J\to\infty$ 时,(1.5.13)式左边的极限与求和号可交换.

引进记号

$$G_{j,J}(k,\alpha) = \frac{1}{C}\prod_{i=j+1}^{J}\left| m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\, \overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^{\alpha})\right|$$
$$\times\, \theta_J^{\#}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha),$$

其中 C 与(1.5.6)式中的常数一样. 那么

$$\sum_{\alpha\in Z}G_{j,J}(k,\alpha) = \frac{1}{C}\sum_{\alpha=-2^{J-j-1}}^{2^{J-j-1}-1}\theta_J^{\#}(k+2^j\alpha)$$
$$\times\prod_{i=j+1}^{J}\left| m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\, \overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\right|$$
$$= \frac{1}{C}\sum_{\alpha=-2^{J-j-1}}^{-1} + \frac{1}{C}\sum_{\alpha=0}^{2^{J-j-1}-1} \tag{1.5.14}$$

由 $\theta_J^{\#}(k)$ 的定义 $(J>j+1, \beta\in\{0,\cdots,2^{J-j}-1\})$, 对 $k\in\{0,\cdots,2^j-1\}$,

$$\theta_J^{\#}(k+2^j\beta-2^J)=\theta_J^{\#}(k+2^j\beta).$$

所以,由 $\prod_{i=j+1}^{J}\left|m_i^{\#}(k)\,\overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k)\right|$ 的 2^J 周期性,我们得到

$$\sum_{\alpha=-2^{J-j-1}}^{-1}\theta_J^{\#}(k+2^j\alpha)\prod_{i=j+1}^{J}\left|m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\,\overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\right|$$

$$=\sum_{\beta=2^{J-j-1}}^{2^{J-j}-1}\theta_J^{\#}(k+2^j\beta-2^J)$$

$$\times\prod_{i=j+1}^{J}\left|m_i^{\#}(k+2^j\beta-2^J)\,\overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\beta-2^J)\right|$$

$$=\sum_{\beta=2^{J-j-1}}^{2^{J-j}-1}\theta_J^{\#}(k+2^j\beta)\prod_{i=j+1}^{J}\left|m_i^{\#}(k+2^j\beta)\,\overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\beta)\right|.$$

这样,从(1.5.14)式和引理 1.5.1.4,引理 1.5.1.3 得到

$$\sum_{\alpha\in Z}G_{j,J}(k,\alpha)$$

$$=\frac{1}{C}\sum_{\alpha=0}^{2^{J-j}-1}\theta_J^{\#}(k+2^{\alpha})\prod_{i=j+1}^{J}\left|m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\,\overline{\widetilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\right|$$

$$=\frac{1}{C}T_{j+1}T_{j+2}\cdots T_J\theta_J^{\#}(k)$$

$$=\frac{1}{C}\theta_J^{\#}(k)$$

$$=\frac{1}{C}\sum_{\alpha\in Z}\left|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\,\overline{\hat{\widetilde{\phi}}}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\right|.\quad(1.5.15)$$

注意到$\{\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi n)\}_{n\in Z}$和$\{\hat{\widetilde{\phi}}_j^{\#}(2\pi n)\}_{n\in Z}$均在$l^2(Z)$中,所以由 Schwarz 不等式有

$$\sum_{\alpha\in Z}\left|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\,\overline{\hat{\widetilde{\phi}}}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\right|<\infty.$$

因此,对固定的 j 和$k\in\{0,\cdots,2^j-1\}$,下面两个序列

$$\{G_{j,J}(k,\alpha)\}_{\alpha\in Z},$$

$$\{|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\ \overline{\hat{\tilde{\phi}}_j^{\#}}(2\pi(k+2^j\alpha))|\}_{\alpha\in Z}$$

都在 $l^1(Z)$ 中. 由于

$$\lim_{J\to\infty}\hat{\phi}_J^{\#}(2\pi n)=\lim_{J\to\infty}\hat{\tilde{\phi}}_J^{\#}(2\pi n)=1,$$

所以

$$\underline{\lim}_{J\to\infty}\theta_J^{\#}(n)\geqslant 1.$$

因此, $G_{j,J}(k,\alpha)$ 满足

$$\begin{aligned}
&\underline{\lim}_{J\to\infty}G_{j,J}(k,\alpha)\\
&=\frac{1}{C}\underline{\lim}_{J\to\infty}\Big[\theta_J^{\#}(k+2^j\alpha)\\
&\quad\times\prod_{i=j+1}^{J}|m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\ \overline{\tilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha)|\chi_{j,J}(\alpha)\Big]\\
&\geqslant\frac{1}{C}\underline{\lim}_{J\to\infty}\theta_J^{\#}(k+2^j\alpha)\\
&\quad\times\underline{\lim}_{J\to\infty}\prod_{i=j+1}^{J}|m_i^{\#}(k+2^J\alpha)\ \overline{\tilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha)|\\
&\geqslant\frac{1}{C}|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\ \overline{\hat{\tilde{\phi}}_j^{\#}}(2\pi(k+2^j\alpha))|.
\end{aligned}\tag{1.5.16}$$

从而由

$$G_{j,J}(k,\alpha)\geqslant\prod_{i=j+1}^{J}|m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\ \overline{\tilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha)|$$

知

$$G_{j,J}(k,\alpha)+\mathrm{Re}\Big(\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\ \overline{\tilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha)\Big)\geqslant 0,\tag{1.5.17}$$

其中 $\mathrm{Re}(c)$ 表示复数 c 的实部.

现在我们从(1.5.16)和(1.5.17)两式得到

$$\frac{1}{C}\sum_{\alpha\in Z}\left|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\ \overline{\hat{\tilde{\phi}}}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\right|$$

$$+\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Re}\Big(\prod_{i=j+1}^{\infty}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\ \overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\Big)$$

$$\leqslant\sum_{\alpha\in Z}\varliminf_{J\to\infty}G_{j,J}(k,\alpha)$$

$$+\sum_{\alpha\in Z}\varliminf_{J\to\infty}\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\ \overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha)$$

$$\leqslant\sum_{\alpha\in Z}\Big(\varliminf_{J\to\infty}\Big(G_{j,J}(k,\alpha)$$

$$+\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\ \overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha)\Big)\Big)$$

$$\leqslant\varliminf_{J\to\infty}\sum_{\alpha\in Z}\Big(G_{j,J}(k,\alpha)$$

$$+\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\ \overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha)\Big)$$

$$=\varliminf_{J\to\infty}\sum_{\alpha\in Z}G_{j,J}(k,\alpha)$$

$$+\varliminf_{J\to\infty}\Big(+\sum_{\alpha\in Z}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\ \overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(k,\alpha)\Big)$$

$$=\frac{1}{C}\sum_{\alpha\in Z}\left|\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\ \overline{\hat{\tilde{\phi}}}_j^{\#}(2\pi(k+2^j\alpha))\right|$$

$$+\varliminf_{J\to\infty}\Big(+\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\ \overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha)\Big),$$

这表明

$$\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{\infty}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\ \overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)$$

$$\leqslant\varliminf_{J\to\infty}\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\ \overline{\tilde{m}}_i^{\#}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha).\tag{1.5.18}$$

类似地,我们可得

$$-\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{\infty}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\,\overline{\widetilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha)$$

$$\leqslant\underline{\lim}_{J\to\infty}\Big(-\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\,\overline{\widetilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha)\Big)$$

$$=-\overline{\lim_{J\to\infty}}\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\,\overline{\widetilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha),$$

这推出

$$\overline{\lim_{J\to\infty}}\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\,\overline{\widetilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha)$$

$$\leqslant\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{\infty}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\,\overline{\widetilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha).\qquad(1.5.19)$$

所以由(1.5.18)式和(1.5.19)式得到

$$\lim_{J\to\infty}\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\,\overline{\widetilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha)$$

$$=\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Re}\prod_{i=j+1}^{\infty}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\,\overline{\widetilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha).\qquad(1.5.20)$$

同样地,我们有

$$\lim_{J\to\infty}\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Im}\prod_{i=j+1}^{J}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\,\overline{\widetilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha)\chi_{j,J}(\alpha)$$

$$=\sum_{\alpha\in Z}\mathrm{Im}\prod_{i=j+1}^{\infty}m_i^{\#}(k+2^j\alpha)\,\overline{\widetilde{m}_i^{\#}}(k+2^j\alpha),\qquad(1.5.21)$$

其中 $\mathrm{Im}(c)$表示复数 c 的虚部.

由于(1.5.20)和(1.5.21)两式,所以当 $J\to\infty$时,(1.5.13)式的左边极限与求和号可交换.证毕.

1.5.2 小波函数的构造

同§1.5.1一样,我们仍考虑双正交小波函数构造的情形.这样,我们首先给出双正交周期多尺度分析的定义.

定义 1.5.2.1 设$\{V_j\}_{j\in Z_+}$和$\{\widetilde{V}_j\}_{j\in Z_+}$是 $L^2([0,1])$的

PMRA 对，其相应的尺度函数序列对为 $\{\phi_j\}_{j\in Z_+}$ 和 $\{\tilde{\phi}_j\}_{j\in Z_+}$. 如果(1.5.5)式成立，则称 $\{V_j\}_{j\in Z_+}$ 和 $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in Z_+}$ 为双正交 PMRA，简称 BOPMRA.

现在我们讨论如何从 BOMRA $\{V_j\}_{j\in Z_+}(\{\phi_j\}_{j\in Z_+})$ 和 $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in Z_+}(\{\phi_j\}_{j\in Z_+})$来构造双正交小波. 令 W_j 为 V_j 在 V_{j+1}中的代数补空间且 $W_j\perp \widetilde{V}_j$, $\widetilde{W}_j$ 为 $\widetilde{V}_j$ 在 $\widetilde{V}_{j+1}$中的代数补空间且 $\widetilde{W}_j\perp V_j$. 那么我们如何找到 W_j 和 $\widetilde{W}_j$ 的生成元呢? 即找到 $\psi_j\in W_j$, $\widetilde{\psi}_j\in \widetilde{W}_j$ 使 $\left\{\psi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$ 和 $\left\{\widetilde{\psi}_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$ 分别为 W_j 和 $\widetilde{W}_j$ 的一个基且

$$\left\langle \psi_j, \widetilde{\psi}_j\left(\cdot-\frac{l}{2^j}\right)\right\rangle = \delta_{0,l}. \tag{1.5.22}$$

下面结论回答了上述问题.

定理 1.5.2.1 假设 $\{V_j\}_{j\in Z_+}(\{\phi_j\}_{j\in Z_+})$ 和 $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in Z_+}(\{\tilde{\phi}_j\}_{j\in Z_+})$是一对 BOPMRA, $\{m_{j+1}\}_{j\in Z_+}$ 和 $\{\widetilde{m}_{j+1}\}_{j\in Z_+}$ 是其相对应的滤波函数序列. 那么存在 $\psi_j\in W_j$ 和 $\widetilde{\psi}_j\in \widetilde{W}_j$ 满足:

(i) $\left\{\psi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$ 和 $\left\{\widetilde{\psi}_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$ 分别为 W_j 和 $\widetilde{W}_j$ 的基;

(ii) (1.5.22)式成立当且仅当存在周期为 $2^{j+1}Z$ 的序列 $\{m_{1,j+1}\}_{j\in Z_+}$ 和 $\{\widetilde{m}_{1,j+1}\}_{j\in Z_+}$ 使对 $k=0,\cdots,2^j-1$, 矩阵

$$M_j^{\#}(k) = \begin{pmatrix} m_{0,j+1}^{\#}(k) & m_{0,j+1}^{\#}(k+2^j) \\ m_{1,j+1}^{\#}(k) & m_{1,j+1}^{\#}(k+2^j) \end{pmatrix}$$

和

$$\widetilde{M}_j^{\#}(k) := \begin{pmatrix} \widetilde{m}_{0,j+1}^{\#}(k) & \widetilde{m}_{0,j+1}^{\#}(k+2^j) \\ \widetilde{m}_{1,j+1}^{\#}(k) & \widetilde{m}_{1,j+1}^{\#}(k+2^j) \end{pmatrix}$$

满足

$$M_j^{\#}(k)(\widetilde{M}_j^{\#}(k))^* = I, \tag{1.5.23}$$

这里 $m^{\#}_{\nu,j+1}=2^{-\frac{1}{2}}m_{\nu,j+1}(\nu=0,1)$.

证明 充分性.令

$$\hat{\psi}^{\#}_{j}(2\pi\alpha)=m^{\#}_{1,j+1}(\alpha)\hat{\phi}^{\#}_{j+1}(2\pi\alpha),\qquad(1.5.24)$$

$$\hat{\widetilde{\psi}}^{\#}_{j}(2\pi\alpha)=\widetilde{m}^{\#}_{1,j+1}(\alpha)\hat{\widetilde{\phi}}^{\#}_{j+1}(2\pi\alpha),\qquad(1.5.25)$$

则(1.5.24)和(1.5.25)两式定义的 ψ_j 和 $\widetilde{\psi}_j$ 就是我们要找的双正交小波函数.我们现在来验证 $\psi_j\in W_j$, $\widetilde{\psi}_j\in\widetilde{W}_j$ 和(i),(ii)两式成立.

对 $k=0,\cdots,2^j-1$,由(1.5.24),(1.5.25)和(1.5.7)三式知,

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\in Z}\hat{\psi}^{\#}_{j}(2\pi(k+2^j\alpha))\overline{\hat{\widetilde{\psi}}^{\#}_{j}(2\pi(k+2^j\alpha))}\\
&=\sum_{\alpha\in Z}m^{\#}_{1,j+1}(k+2^j\alpha)\hat{\phi}^{\#}_{j+1}(2\pi\alpha)(2\pi(k+2^j\alpha))\\
&\quad\times\overline{\widetilde{m}_{1,j+1}(k+2^j\alpha)}\ \overline{\hat{\widetilde{\phi}}^{\#}_{j+1}(2\pi(k+2^j\alpha))}\\
&=\sum_{\nu=0}^{1}m^{\#}_{1,j+1}(k+2^j\nu)\overline{\widetilde{m}_{1,j+1}(k+2^j\nu)}\\
&\quad\times\sum_{\beta\in Z}\hat{\phi}^{\#}_{j+1}(2\pi(k+2^j\nu+2^{j+1}\beta))\overline{\hat{\widetilde{\phi}}^{\#}_{j+1}(2\pi(k+2^j\nu+2^{j+1}\beta))}\\
&=\sum_{\nu=0}^{1}m^{\#}_{1,j+1}(k+2^j\nu)\overline{\widetilde{m}^{\#}_{1,j+1}(k+2^j\nu)}.\qquad(1.5.26)\end{aligned}$$

同样有

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\in Z}\hat{\phi}^{\#}_{j}(2\pi(k+2^j\alpha))\overline{\hat{\widetilde{\psi}}^{\#}_{j}(2\pi(k+2^j\alpha))}\\
&=\sum_{\nu=0}^{1}m^{\#}_{0,j+1}(k+2^j\nu)\overline{\widetilde{m}^{\#}_{1,j+1}(k+2^j\nu)},\qquad(1.5.27)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\in Z}\hat{\psi}^{\#}_{j}(2\pi(k+2^j\alpha))\overline{\hat{\widetilde{\psi}}^{\#}_{j}(2\pi(k+2^j\alpha))}\\
&=\sum_{\nu=0}^{1}m^{\#}_{1,j+1}(k+2^j\nu)\overline{\widetilde{m}^{\#}_{0,j+1}(k+2^j\nu)}.\qquad(1.5.28)\end{aligned}$$

然而由(1.5.23)式知,

$$\sum_{\nu=0}^{1} m_{1,j+1}^{\#}(k+2^j\nu)\,\overline{\widetilde{m}_{1,j+1}^{\#}}(k+2^j\nu)=1.$$

因此由(1.5.26)式和引理 1.5.1.1 知,(ii)式成立,从而 $\left\{\psi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$和$\left\{\widetilde{\psi}_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$分别为线性无关系.

显然由(1.5.24)和(1.5.25)两式知,$\psi_j\in V_{j+1}$, $\widetilde{\psi}_j\in\widetilde{V}_{j+1}$. 所以我们只需证明

$$\left\{\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right),\psi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\middle|\, l=0,\cdots,2^j-1\right\}$$

和

$$\left\{\widetilde{\phi}_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right),\widetilde{\psi}_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\middle|\, l=0,\cdots,2^j-1\right\}$$

线性无关(从而分别为 V_{j+1}和 $\widetilde{V}_{j+1}$的基)即可.

首先由(1.5.23)式知,

$$\sum_{\nu=0}^{1} m_{0,j+1}^{\#}(k+2^j\nu)\,\overline{\widetilde{m}_{1,j+1}^{\#}}(k+2^j\nu)=0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{1} m_{1,j+1}^{\#}(k+2^j\nu)\,\overline{\widetilde{m}_{0,j+1}^{\#}}(k+2^j\nu)=0.$$

因而由(1.5.27)式,(1.5.28)式和引理 1.5.1.1 的(ii)知,$\forall l=0,\cdots,2^j-1$,

$$\left\langle\phi_j,\widetilde{\psi}_j\left(\cdot-\frac{l}{2^j}\right)\right\rangle=\left\langle\psi_j,\widetilde{\phi}_j\left(\cdot-\frac{l}{2^j}\right)\right\rangle=0.\quad(1.5.29)$$

这样,假设

$$\sum_{l=0}^{2^j-1}\left(c_l\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)+d_l\psi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right)=0.\quad(1.5.30)$$

对上式两边用 $\widetilde{\psi}_j\left(x-\frac{l_1}{2^j}\right)$作内积,由(1.5.29)式和(ii)知,

$$0=\sum_{l=0}^{2^j-1}c_l\left\langle\phi_j\left(\cdot-\frac{l}{2^j}\right),\widetilde{\psi}_j\left(\cdot-\frac{l_1}{2^j}\right)\right\rangle$$

$$+\sum_{l=0}^{2^j-1} d_l\left\langle \psi_j\left(\cdot-\frac{l}{2^j}\right),\ \widetilde{\psi}_j\left(\cdot-\frac{l_1}{2^j}\right)\right\rangle$$

$$=0+\sum_{l=0}^{2^j-1} d_l\delta_{l,l_1}$$

$$=d_{l_1},$$

因此(1.5.30)式变为

$$\sum_{l=0}^{2^j-1} c_l\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)=0,$$

这推出 $c_l=0$,因为$\left\{\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$线性无关.故

$$\left\{\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right),\psi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\Big| l=0,\cdots,2^j-1\right\}$$

为 V_{j+1}的基.

必要性.由于 $\psi_j\in W_j\subset V_{j+1}$和 $\widetilde{\psi}_j\in \widetilde{W}_j\subset \widetilde{V}_{j+1}$,所以存在 $2^{j+1}Z$-周期序列 $m_{1,j+1}(\alpha)$和 $\widetilde{m}_{1,j+1}(\alpha)$使(1.5.24)和(1.5.25)两式成立.这样由 $V_j\perp\widetilde{W}_j$, $\widetilde{V}_j\perp W_j$, $\left\langle\psi_j,\psi_j\left(\cdot-\frac{l}{2^j}\right)\right\rangle=\delta_{0,l}$和引理1.5.1.1知,类似(1.5.26)式,(1.5.27)式和(1.5.28)式可得

$$\begin{cases}\sum_{\nu=0}^{1} m_{1,j+1}^{\#}(k+2^j\nu)\,\overline{\widetilde{m}_{1,j+1}^{\#}}(k+2^j\nu)=1,\\ \sum_{\nu=0}^{1} m_{0,j+1}^{\#}(k+2^j\nu)\,\overline{\widetilde{m}_{1,j+1}^{\#}}(k+2^j\nu)=0,\\ \sum_{\nu=0}^{1} m_{1,j+1}^{\#}(k+2^j\nu)\,\overline{\widetilde{m}_{0,j+1}^{\#}}(k+2^j\nu)=0.\end{cases}\qquad(1.5.31)$$

又$\left\langle\phi_j,\widetilde{\phi}_j\left(\cdot-\frac{l}{2^j}\right)\right\rangle=\delta_{0,l}$,所以(1.5.4)式成立.(1.5.4)和(1.5.31)两式表明(1.5.23)式成立.证毕.

根据定理1.5.2.1,我们只需找出 $m_{1,j+1}$和 $\widetilde{m}_{1,j+1}$即可找到双正交小波$\{\psi_j\}$和$\{\widetilde{\psi}_j\}$.在我们现在讨论的一维情形下,$m_{1,j+1}$和 $\widetilde{m}_{1,j+1}$的存在性是容易的,其中一个解便是

$$m^{\#}_{1,j+1}(k) = e^{i2^{-j}\pi k}\,\overline{\widetilde{m}^{\#}_{0,j+1}}(k + 2^j),$$

$$\widetilde{m}^{\#}_{1,j+1}(k) = e^{i2^{-j}\pi k}\,\overline{m^{\#}_{0,j+1}}(k + 2^j),$$

这里 $k\in Z, m^{\#}_{\nu,j+1}=2^{-\frac{1}{2}}m_{\nu,j+1}, \widetilde{m}^{\#}_{\nu,j+1}=2^{-\frac{1}{2}}\widetilde{m}_{\nu,j+1}, \nu=0,1$. 很容易验证上面给出的 $m_{1,j+1}$和 $\widetilde{m}_{1,j+1}$满足(1.5.23)式.

§1.6 用正交样条构造尺度函数和小波

在这一节,我们用所谓的正交样条来构造尺度函数和小波.

1.6.1 正交样条和尺度函数

给定一个序列集合

$$\{a_j\}_{j\in Z_+} = \{\{a_j(\alpha)\}_{\alpha\in Z}\}_{j\in Z_+} \subset l^2(Z).$$

对 $k=0,\cdots,2^j-1$,定义

$$v_{j,k}(x) := \sum_{\alpha\in Z} a_j(k + 2^j\alpha)e^{i2\pi(k+2^j\alpha)x}, \quad x \in R$$

那么 $v_{j,k}(x)$具有下列基本性质:

性质 1.6.1.1

(i) $v_{j,k}\left(x-\dfrac{1}{2^j}\right)=v_{j,k}(x)\sigma_j^{-k}$;

(ii) $\langle v_{j,k}, v_{j,l}\rangle=\delta_{k,l}\sum_{\alpha\in Z}|a_j(k+2^j\alpha)|^2$;

(iii) $\{v_{j,k}(x)\mid k=0,\cdots,2^j-1\}$是一个正交系当且仅当对 $k=0,\cdots,2^j-1$,

$$\sum_{\alpha\in Z}|a_j(k + 2^j\alpha)|^2 \neq 0.$$

证明是容易的,我们省略它.

定义 1.6.1.1 我们称 $v_{j,k}(x)k=0,\cdots,2^j-1$ 为正交样条.

定理 1.6.1.1 设 $a_j\in l^2(Z)(j\in Z_+)$且满足对 $k=0,\cdots,2^j-1$,有

$$\sum_{\alpha\in Z}|a_j(k + 2^j\alpha)|^2 > 0$$

及

$$a_j(\alpha) = m_{j+1}(\alpha)a_{j+1}(\alpha), \quad \alpha \in Z,$$

这里$\{m_{j+1}(\alpha)\}_\alpha$是一个周期为$2^{j+1}Z$的序列.再假设

$$\lim_{j\to+\infty} a_j(\alpha) = 1 \quad (\alpha \in Z) \tag{1.6.1}$$

定义

$$\phi_j(x) := \sum_{k=0}^{2^j-1} v_{j,k}(x),$$

$$V_j := \text{span}\left\{\phi_j\left(x - \frac{l}{2^j}\right)\middle| l = 0,\cdots,2^j - 1\right\}.$$

那么$\{V_j\}_{j\in Z_+}$是$L^2([0,1])$的一个尺度函数序列为$\{\phi_j\}_{j\in Z_+}$的PMRA.

证明 由$\sum_{\alpha\in Z}|a_j(k+2^j\alpha)|^2>0$知,$\forall k=0,\cdots,2^j-1$,

$$\sum_{p\in Z}|\hat{\phi}_j(2\pi(k+2^jp))|^2$$

$$=\sum_{p\in Z}\left|\sum_{l=0}^{2^j-1}\hat{v}_{j,l}(2\pi(k+2^jp))\right|^2$$

$$=\sum_{p\in Z}\left|\sum_{l=0}^{2^j-1}\left(\sum_{q\in Z}a_j(l+2^jq)\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(l-k+2^j(q-p))}\right)\right|^2$$

$$=\sum_{p\in Z}|a_j(k+2^jp)|^2>0,$$

所以由定理1.3.1.1知,$\left\{\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$线性无关.故$\left\{\phi_j\left(x-\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$为$V_j$的基.

注意到$\hat{\phi}_j(2\pi\alpha)=a_j(\alpha)$,所以

$$\hat{\phi}_j(2\pi\alpha) = m_{j+1}(\alpha)\hat{\phi}_{j+1}(2\pi\alpha),$$

这表明$V_j\subset V_{j+1}(j\in Z_+)$.

由(1.6.1)式知,$\forall\alpha\in Z$,存在j使$a_j(\alpha)\neq0$,即存在j使$\hat{\phi}_j(2\pi\alpha)\neq0$,所以

$$\{\alpha \mid \hat{\phi}_j(2\pi\alpha) = 0, j \in Z_+\} = \varnothing.$$

因此由推论 1.3.2.1 知，

$$\overline{\bigcup_{j\in Z_+} V_j} = L^2([0,1]).$$

故结论证毕.

对于满足 $a_j(\alpha)=m_{j+1}(\alpha)a_{j+1}(\alpha)$ 的正交样条 $v_{j,k}(x)$，它还满足下列性质.

性质 1.6.1.2 对 $k=0,\cdots,2^j-1$，有

$$v_{j,k}(x) = m_{j+1}(k)v_{j+1,k}(x) + m_{j+1}(k+2^j)v_{j+1,k+2^j}(x) \tag{1.6.2}$$

和

$$\|v_{j+1,k}\|^2|m_{j+1}(k)|^2 + \|v_{j+1,k+2^j}\|^2|m_{j+1}(k+2^j)|^2 = \|v_{j,k}\|^2. \tag{1.6.3}$$

证明 已知 $v_{j,k}(x) = \sum\limits_{p\in Z}a_j(k+2^jp)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(k+2^jp)x}$，所以我们将和式分成偶奇两部分，然后利用 m_{j+1} 的周期性和 $a_j(\alpha)=m_{j+1}\times a_{j+1}(\alpha)$ 即可得到(1.6.2)式.

注意到当 $k\neq l$ 时，$\langle v_{j,k},v_{j,l}\rangle=0$，所以由(1.6.2)式知，

$$\begin{aligned}\|v_{j,k}\|^2 &= \langle m_{j+1}(k)v_{j+1,k}(\cdot) + m_{j+1}(k+2^j)v_{j+1,k+2^j}(\cdot),\\ &\qquad m_{j+1}(k)v_{j+1,k}(\cdot) + m_{j+1}(k+2^j)v_{j+1,k+2^j}(\cdot)\rangle\\ &= |m_{j+1}(k)|^2\|v_{j+1,k+2^j}\|^2\\ &\qquad + \|v_{j+1,k+2^j}\|^2|m_{j+1}(k+2^j)|^2.\end{aligned}$$

故(1.6.3)式成立. 证毕.

1.6.2 用正交样条来构造尺度函数

根据§1.6.1 的结论，尺度函数 ϕ_j 的构造相当于对 $j\in Z_+$ 寻找 $a_j\in l^2(Z)$ 满足 $\forall k=0,\cdots,2^j-1$，

$$\sum_{\alpha\in Z}|a_j(k+2^j\alpha)|^2 > 0, \tag{1.6.4}$$

$$a_j(\alpha) = m_{j+1}(\alpha)a_{j+1}(\alpha) \tag{1.6.5}$$

和(1.6.1)式.当然,$\{m_{j+1}(\alpha)\}_{\alpha}$是一个周期为 $2^{j+1}Z$ 的序列.明显地,如果(1.6.5)式成立,那么

$$a_j(\alpha) = \left[\prod_{l=j+1}^{J} m_l(\alpha)\right] a_J(\alpha).$$

若加上(1.6.1)式和存在 $\varepsilon>0$,使得 $\forall \alpha\in Z$,

$$1 - m_j(\alpha) = O(j^{-1-\varepsilon}), \quad (j \to +\infty) \qquad (1.6.6)$$

那么

$$a_j(\alpha) = \prod_{s=j+1}^{+\infty} m_s(\alpha), \quad \alpha \in Z. \qquad (1.6.7)$$

事实上,(1.6.6)式蕴含(1.6.7)式中无穷乘积收敛.

现在我们假设 $\forall j\in Z_+$,$\{m_{j+1}(\alpha)\}_{\alpha}$为一周期是 $2^{j+1}Z$ 的序列且满足对任意 $k=0,\cdots,2^j-1$,

$$|m_{j+1}(k)|^2 + |m_{j+1}(k+2^j)|^2 \leqslant 1, \qquad (1.6.8)$$

$$\prod_{s=j+1}^{+\infty} |m_s(k+2^j p)|^2 > 0, \qquad (1.6.9)$$

对某个 p 和(1.6.6)式.

置 $a_j(\alpha)$为由(1.6.7)式定义,$\alpha\in Z$.那么我们有

性质 1.6.2.1 若对 $j\in Z_+$,由上面给定的 $m_{j+1}(\alpha)$满足(1.6.6),(1.6.8)和(1.6.9)三式,那么对 $\alpha\in Z$,(1.6.1),(1.6.5)两式成立且对 $k=0,\cdots,2^j-1$,

$$0 < \sum_{\alpha\in Z} |a_j(k+2^j\alpha)|^2 \leqslant 2. \qquad (1.6.10)$$

证明 条件(1.6.6)保证 $\prod_{s=j+1}^{+\infty} m_s(\alpha)$ 收敛,并且 $\forall \alpha\in Z$,存在 J 使 $a_J(\alpha)\neq 0$.写着

$$a_J(\alpha) = \left[\prod_{s=J+1}^{n} m_s(\alpha)\right] a_n(\alpha).$$

在上式对 $n\to+\infty$时取极限即得(1.6.1)式.(1.6.5)式立即来自 $a_j(\alpha)$的定义.

由(1.6.9)式知,对 $k=0,\cdots,2^j-1$,

$$\sum_{q\in Z}|a_j(k+2^jq)|^2$$

$$=\sum_{q\in Z}\left|\prod_{s=j+1}^{+\infty}m_s(k+2^jq)\right|^2$$

$$=\sum_{q\in Z,q\neq p}\prod_{s=j+1}^{+\infty}|m_s(k+2^jq)|^2+\prod_{s=j+1}^{+\infty}|m_s(k+2^jp)|^2>0.$$

所以(1.6.10)式的左边成立. 为保证(1.6.10)式右边不等式,考虑

$$\begin{aligned}I_s(k)&=\sum_{|p|<2^{s-j}}\prod_{t=j+1}^{s}|m_t(k+2^jp)|^2\quad(s>j+1)\\&=\sum_{|p|<2^{s-j-1}}+\sum_{2^{s-j-1}\leqslant|p|<2^{s-j}}\\&=\sum_{|p|<2^{s-j-1}}\Big[\prod_{t=j+1}^{s-1}|m_t(k+2^jp)|^2|m_s(k+2^jp)|^2\\&\quad+\prod_{t=j+1}^{s-1}|m_t(k+2^jp+2^{s-1})|^2\\&\quad\times|m_s(k+2^jp+2^{s-1})|^2\Big].\end{aligned}\tag{1.6.11}$$

由 $\prod_{t=j+1}^{s-1}|m_t(k+2^jp+2^{s-1})|^2=\prod_{t=j+1}^{s-1}|m_t(k+2^jp)|^2$,(1.6.8)和(1.6.11)两式知,

$$\begin{aligned}I_s(k)&\leqslant I_{s-1}(k)\leqslant\cdots\leqslant I_{j+1}(k)\\&=\sum_{|p|<2}|m_{j+1}(k+2^jp)|^2\\&=|m_{j+1}(k-2^j)|^2+|m_{j+1}(k)|^2+|m_{j+1}(k+2^j)|^2\\&\leqslant 2.\end{aligned}\tag{1.6.12}$$

又由(1.6.8)式知,当$|p|<2^{s-j}$且$t>s$时,

$$|m_t(k+2^jp)|^2\leqslant 1.$$

因此

$$|a_j(k+2^jp)|^2=\prod_{t=j+1}^{+\infty}|m_t(k+2^jp)|^2$$

$$= \prod_{t=j+1}^{s} |m_t(k+2^j p)|^2 \prod_{t=s+1}^{+\infty} |m_t(k+2^j p)|^2$$

$$\leqslant \prod_{t=j+1}^{s} |m_t(k+2^j p)|^2. \tag{1.6.13}$$

由(1.6.13)和(1.6.12)两式知,

$$\sum_{|p|<2^{s-j}} |a_j(k+2^j p)|^2 \leqslant I_s(k) \leqslant 2.$$

在上式两边对 $s \to +\infty$ 时取极限即得所证结论.证毕.

根据这个定理,我们可得到尺度函数的构造如下:

定理 1.6.2.1 对 $j \in Z_+$,令 $m_{j+1}(\alpha)$ 是一个周期为 $2^{j+1}Z$ 的序列且满足(1.6.6),(1.6.8)和(1.6.9)三式.定义:

$$a_j(\alpha) = \prod_{t=j+1}^{+\infty} m_t(\alpha) \quad (\alpha \in Z),$$

$$v_{j,k} = \sum_{\alpha \in Z} a_j(k+2^j\alpha) e^{i2\pi(k+2^j\alpha)x},$$

$$V_j = \operatorname{span}\{v_{j,k}(x) \mid k = 0, \cdots, 2^j - 1\}.$$

那么$\{V_j\}_{j \in Z_+}$是 $L^2([0,1])$的一个多尺度分析,其尺度函数列为

$\phi_j(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} v_{j,k}(x)$,且

$$\{v_{j,k}(x) \mid k = 0, \cdots, 2^j - 1\}$$

为 V_j 的正交基.

1.6.3 用正交样条来构造小波

假设 $v_{j,k}(x)$,ϕ_j 和 V_j 是定理 1.6.2.1 中的函数和空间且满足定理 1.6.2.1 中的条件,那么$\{V_j\}_{j \in Z_+}$是 $L^2([0,1])$的一个 PMRA.设 W_j 为 V_j 在 V_{j+1}中的正交补.显然 $\dim(W_j) = 2^j$.我们这一节的目的就是寻找 W_j 的一个基,从而得到小波基.

给定另一序列 $b_j (j \in Z_+)$满足对 $p \in Z, k = 0, \cdots, 2^{j+1} - 1$,

$$g_{j+1}(k) a_{j+1}(k+2^{j+1}p) = b_j(k+2^j p), \tag{1.6.14}$$

其中 $g_{j+1}(k)$为周期是 $2^{j+1}Z$ 的序列.对于每个 b_j,定义

$$u_{j,k}(x) = \sum_{p\in Z} b_j(k + 2^j p)e^{i2\pi(k+2^j p)x}, \qquad (1.6.15)$$

其中 $k=0,\cdots,2^j-1$.那么与§1.6.1的性质1.6.1.1一样,我们可证$\{u_{j,k}(x)\}_{k=0}^{2^j-1}$是正交系当且仅当

$$\| u_{j,k} \|^2 = \sum_{p\in Z} | b_j(k + 2^j p) |^2 > 0, \qquad (1.6.16)$$

我们再看 $u_{j,k}(x)$的表达式.由(1.6.14)和(1.6.15)两式知,

$$\begin{aligned} u_{j,k}(x) &= \sum_{p\text{为偶}} + \sum_{p\text{为奇}} \\ &= \sum_{p\in Z} b_j(k + 2^{j+1}p)e^{i2\pi(k+2^{j+1}p)x} \\ &\quad + \sum_{p\in Z} b_j(k + 2^{j+1}p + 2^j)e^{i2\pi(k+2^{j+1}p+2^j)x} \\ &= \sum_{p\in Z} g_{j+1}(k)a_{j+1}(k + 2^{j+1}p)e^{i2\pi(k+2^{j+1}x)} \\ &\quad + \sum_{p\in Z} g_{j+1}(k + 2^j)a_{j+1}(k + 2^j + 2^{j+1}p) \\ &\quad \times e^{i2\pi(k+2^j+2^{j+1}p)x} \\ &= g_{j+1}(k)v_{j+1,k}(x) \\ &\quad + g_{j+1}(k + 2^j)v_{j+1,k+2^j}(x). \qquad (1.6.17) \end{aligned}$$

因此从(1.6.17)式知,$\{u_{j,k}(x)\}_{k=0}^{2^j-1} \subset V_{j+1}$且

$$\begin{aligned} \| u_{j,k} \|^2 &= | g_{j+1}(k) |^2 \| v_{j+1,k} \|^2 \\ &\quad + | g_{j+1}(k + 2^j) |^2 \| v_{j+1,k+2^j} \|^2. \qquad (1.6.18) \end{aligned}$$

将(1.6.2)式和(1.6.17)式结合起来,利用性质1.6.1.1知,当 $k \neq l$ 时,$\langle v_{j,k}, u_{j,k} \rangle = 0$;当 $k=l$ 时

$$\begin{aligned} \langle v_{j,k}, u_{j,l} \rangle &= m_{j+1}(k)\bar{g}_{j+1}(k) \| v_{j+1,k} \|^2 \\ &\quad + m_{j+1}(k + 2^j)g_{j+1}(k + 2^j) \| v_{j+1,k+2^j} \|^2. \end{aligned}$$

所以我们有

性质 1.6.3.1　$\{u_{j,k}(x)\}_{k=0}^{2^j-1} \subset W_j$ 当且仅当对 $k=0,\cdots,2^j-1$,

$$\| v_{j+1,k} \|^2 m_{j+1}(k) \bar{g}_{j+1}(k) + \| v_{j+1,k+2^j} \|^2 \times m_{j+1}(k+2^j) \bar{g}_{j+1}(k+2^j) = 0. \quad (1.6.19)$$

进一步,由(1.6.16)式和(1.6.18)式知,$\{u_{j,k}(x)\}_{k=0}^{2^j-1}$为正交系当且仅当对 $k=0,\cdots,2^j-1$,

$$\| v_{j+1,k} \|^2 |g_{j+1}(k)|^2 + \| v_{j+1,k+2^j} \|^2 |g_{j+1}(k+2^j)|^2 \neq 0. \quad (1.6.20)$$

因此,我们现在的问题是如何找到周期为 $2^{j+1}Z$ 的序列 $\{g_{j+1}(k)\}_k$使(1.6.19)式和(1.6.20)式成立.下面定理给出了回答.

定理 1.6.3.1 设 ω_{j+1}为周期是 $2^{j+1}Z$ 的序列且满足对 $l=0,\cdots,2^j-1$,

$$\omega_{j+1}(l+2^j) = -\omega_{j+1}(l) \neq 0.$$

定义 g_{j+1}如下:

$$g_{j+1}(l) = \omega_{j+1}(l) \frac{\bar{m}_{j+1}(l+2^j)}{\| v_{j+1,l} \|^2},$$

其中 $l=0,\cdots,2^{j+1}-1$. 则由(1.6.14)式和(1.6.15)式定义的 $\{u_{j,k}(x)\}_{k=0}^{2^j-1}$是 W_j 的正交基.

证明 只需证明(1.6.19)和(1.6.20)两式成立即可.因为

$$\begin{aligned}
&\| v_{j+1,k} \|^2 m_{j+1}(k) \bar{g}_{j+1}(k) \\
&\quad + \| v_{j+1,k+2} \|^2 m_{j+1}(k+2^j) \bar{g}_{j+1}(k+2^j) \\
&= \| v_{j+1,k} \|^2 m_{j+1}(k) \bar{\omega}_{j+1}(k) \frac{m_{j+1}(k+2^j)}{\| v_{j+1,k} \|^2} \\
&\quad + \| v_{j+1,k+2^j} \|^2 m_{j+1}(k+2^j) \\
&\quad \times \bar{\omega}_{j+1}(k+2^j) \frac{m_{j+1}(k+2^{j+1})}{\| v_{j+1,k+2^j} \|^2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

所以(1.6.19)式成立.

令 $\mu_j = \max\left\{\frac{\| v_{j+1,k} \|^2}{|\omega_{j+1}(k)|^2}, \frac{\| v_{j+1,k+2^j} \|^2}{|\omega_{j+1}(k)|^2}\right\}$. 那么由 $\mu_j > 0$ 和

$$\| v_{j,k} \|^2 = \| v_{j+1,k} \|^2 | m_{j+1}(k) |^2 + \| v_{j+1,k+2^j} \|^2 | m_{j+1}(k) |^2 > 0$$

知,

$$\begin{aligned}
&\| v_{j+1,k} \|^2 | g_{j+1}(k) |^2 + \| v_{j+1,k+2^j} \|^2 | g_{j+1}(k+2^j) |^2 \\
&= | \omega_{j+1}(k) |^2 | m_{j+1}(k+2^j) |^2 \\
&\quad + | \omega_{j+1}(k+2^{j+1}) |^2 | m_{j+1}(k+2^{j+1}) |^2 \\
&= | \omega_{j+1}(k) |^2 (| m_{j+1}(k+2^j) |^2 + | m_{j+1}(k) |^2) \\
&\geqslant \mu^{-1} \| v_{j,k} \|^2 > 0.
\end{aligned}$$

故(1.6.20)式成立. 证毕.

定理 1.6.3.2　在定理 1.6.3.1 条件下, 设 $\psi_j(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} u_{j,k}(x)$. 那么

$$\left\{\psi_j\left(x - \frac{l}{2^j}\right) \Big| l = 0, \cdots, 2^j - 1\right\}$$

为 W_j 的一个基.

证明　由定理 1.6.3.1 知, $\psi_j \in W_j$. 因此只需证明 $\left\{\psi_j\left(x - \frac{l}{2^j}\right)\right\}_{l=0}^{2^j-1}$ 线性无关即可. 而这由定理 1.3.1.1 知, 充分地需证

$$\sum_{p \in Z} | \hat{\psi}_j(2\pi(k + 2^j p)) |^2 > 0 \quad (k = 0, \cdots, 2^j - 1).$$

事实上, 由(1.6.16)式知,

$$\begin{aligned}
&\sum_{p \in Z} | \hat{\psi}_j(2\pi(k + 2^j p)) |^2 \\
&= \sum_{p \in Z} \left| \sum_{l=0}^{2^j-1} \hat{u}_{j,l}(2\pi(k + 2^j p)) \right|^2 \\
&= \sum_{p \in Z} | b_j(k + 2^j p) |^2 > 0.
\end{aligned}$$

证毕.

1.6.4 正交样条和小波重构,分解算法

假设 $\{v_{j,k}(x)\}_{k=0}^{2^j-1}$ 和 $\{u_{j,k}(x)\}_{k=0}^{2^j-1}$ 分别是前面构造的 V_j 和 W_j 的正交基. 那么前面已证得(1.6.2)和(1.6.17)两式成立. 注意到 $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$,所以 $\{v_{j,l}(x),u_{j,l}(x)\}_{l=0}^{2^j-1}$ 为 V_{j+1} 的正交基. 这样对 $k=0,\cdots,2^j-1$,

$$v_{j+1,k}(x)=\sum_{l=0}^{2^j-1}\left[\langle v_{j+1,k},v_{j,l}\rangle\frac{v_{j,l}(x)}{\|v_{j,l}\|^2}+\langle v_{j+1,k},u_{j,l}\rangle\frac{u_{j,l}(x)}{\|u_{j,l}\|^2}\right].\qquad(1.6.21)$$

又由(1.6.2)和(1.6.17)两式知,对 $k=0,\cdots,2^{j+1}-1$,

$$\langle v_{j+1,k},v_{j,l}\rangle=\begin{cases}\bar{m}_{j+1}(k)\|v_{j+1,k}\|^2, & k=l,\\ 0, & k\neq l,\end{cases}$$

$$\langle v_{j+1,k},u_{j,l}\rangle=\begin{cases}\bar{g}_{j+1}(k)\|v_{j+1,k}\|^2, & k=l,\\ 0, & k\neq l,\end{cases}$$

所以从(1.6.21)式得,对 $k=0,\cdots,2^{j+1}-1$,

$$v_{j+1,k}(x)=p_{j+1}(k)v_{j,k}(x)+q_{j+1}(k)u_{j,k}(x),\qquad(1.6.22)$$

其中

$$p_{j+1}(k)=\frac{\bar{m}_{j+1}(k)\|v_{j+1,k}\|^2}{\|v_{j,k}\|^2},$$

$$q_{j+1}(k)=\frac{\bar{g}_{j+1}(k)\|v_{j+1,k}\|^2}{\|u_{j,k}\|^2}.$$

任给 $f_{j+1}\in V_{j+1}$,则由 $\{v_{j+1,k}(x)\}_{k=0}^{2^{j+1}-1}$ 为 V_{j+1} 的正交基知,

$$f_{j+1}(x)=\sum_{k=0}^{2^{j+1}-1}s_{j+1}(k)v_{j+1,k}(x).\qquad(1.6.23)$$

由 $f_{j+1}=f_j+d_j, f_j\in V_j, d_j\in W_j$ 和(1.6.2),(1.6.17)两式知,

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x) &= f_j(x)+d_j(x) \\ &= \sum_{k=0}^{2^j-1} s_j(k)v_{j,k}(x)+\sum_{k=0}^{2^j-1} t_j(k)u_{j,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{2^j-1} s_j(k)[m_{j+1}(k)v_{j+1,k}(x) \\ &\quad + m_{j+1}(k+2^j)v_{j+1,k+2^j}(x)] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2^j-1} t_j(k)[g_{j+1}(k)v_{j+1,k}(x) \\ &\quad + g_{j+1}(k+2^j)v_{j+1,k+2^j}(x)] \\ &= \sum_{k=0}^{2^j-1}[s_j(k)m_{j+1}(k)+t_j(k)g_{j+1}(k)]v_{j+1,k}(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2^j-1}[s_j(k)m_{j+1}(k+2^j) \\ &\quad + t_j(k)g_{j+1}(k+2^j)]v_{j+1,k+2^j}(x). \end{aligned} \tag{1.6.24}$$

注意到 $s_j(k)=s_j(k+2^j), t_j(k)=t_j(k+2^j)(k=0,\cdots,2^j-1)$,所以由(1.6.24)式知,

$$f_{j+1}(x)=\sum_{k=0}^{2^{j+1}-1}[s_j(k)m_{j+1}(k)+t_j(k)g_{j+1}(k)]v_{j+1,k}(x). \tag{1.6.25}$$

我们比较(1.6.23)和(1.6.25)两式的系数便得重构算法:

$$s_{j+1}(k)=s_j(k)m_{j+1}(k)+t_j(k)g_{j+1}(k),$$

其中 $k=0,\cdots,2^{j+1}-1$.将(1.6.22)式和(1.6.23)式结合起来,我们得到

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x) &= \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} s_{j+1}(k)p_{j+1}(k)v_{j,k}(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} s_{j+1}(k)q_{j+1}(k)u_{j,k}(x). \end{aligned} \tag{1.6.26}$$

又

$$f_{j+1}(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} s_j(k) v_{j,k}(x) + \sum_{k=0}^{2^j-1} t_j(k) u_{j,k}(x),$$

所以与(1.6.26)式比较起来得:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{2^j-1} s_j(k) v_{j,k}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} s_{j+1}(k) p_{j+1}(k) v_{j,k}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{2^j-1} [s_{j+1}(k) p_{j+1}(k) + s_{j+1}(k+2^j) p_{j+1}(k+2^j)] v_{j,k}(x).\end{aligned} \tag{1.6.27}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{2^j-1} t_j(k) u_{j,k}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} s_{j+1}(k) q_{j+1}(k) u_{j,k}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{2^j-1} [s_{j+1}(k) q_{j+1}(k) + s_{j+1}(k+2^j) q_{j+1}(k+2^j)] u_{j,k}(x)\end{aligned} \tag{1.6.28}$$

这样,从(1.6.27)和(1.6.28)两式,我们便得到分解算法:

$$s_j(k) = s_{j+1}(k) p_{j+1}(k) + s_{j+1}(k+2^j) p_{j+1}(k+2^j),$$

$$t_j(k) = s_{j+1}(k) q_{j+1}(k) + s_{j+1}(k+2^j) q_{j+1}(k+2^j),$$

其中 $k=0,\cdots,2^j-1$.

§1.7 周期小波的例子

周期小波的最早例子是由直线上的多尺度分析派生出来的. 设$\{V_\alpha\}_{\alpha\in Z}$是$L^2(-\infty,+\infty)$的一个正交 MRA,$\phi(x)$为其对应的尺度函数,即 V_α为闭子空间且满足下列条件:

(i) $V_\alpha \subset V_{\alpha+1}$，$f(x)\in V_\alpha$ 当且仅当 $f(2x)\in V_{\alpha+1}$；

(ii) $\bigcap_{\alpha\in Z} = \{0\}$，$\overline{\bigcup_{\alpha\in Z} V_\alpha} = L^2(-\infty, +\infty)$；

(iii) $\{\phi(x-n)\}_{n\in Z}$ 为 V_0 的一个标准正交基.

假设 $\psi(x)$ 是来自上述多尺度分析的小波函数且 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 有足够的衰减性. 假定 $j\in Z_+$，$k=0,\cdots,2^j-1$，$\phi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\phi(2^jx-k)$，$\psi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)$.

定义：

$$\phi_{j,k}^{(p)}(x) := \sum_{\alpha\in Z}\phi_{j,k}(x-\alpha),$$

$$V_j^{(p)} := \operatorname{span}\{\phi_{j,k}^{(p)}(x) \mid k = 0,\cdots,2^j-1\},$$

$$\psi_{j,k}^{(p)}(x) := \sum_{\alpha\in Z}\psi_{j,k}(x-\alpha),$$

$$W_j^{(p)} := \operatorname{span}\{\psi_{j,k}^{(p)}(x) \mid k = 0,\cdots,2^j-1\}.$$

那么我们有

命题 1.7.1 $\{V_j^{(p)}\}_{j\in Z_+}$ 构成了 $L^2([0,1])$ 的一个 PMRA，且

$$\{\phi_{j,k}^{(p)}(x) \mid k = 0,\cdots,2^j-1\}$$

和

$$\{\psi_{j,k}^{(p)}(x) \mid = 0,\cdots,2^j-1\}$$

分别为 $V_j^{(p)}$ 和 $W_j^{(p)}$($V_j^{(p)}\oplus W_j^{(p)} = V_{j+1}^{(p)}$)的标准正交基.

此命题的证明是容易的，我们省略它.

下面我们给出两个不经由周期化过程而直接由前面一般理论导出的具体周期小波例子. 第二章和第三章将给出两类具有不同性质的周期小波.

例 1.7.1 设 $m\geqslant 1$ 是正整数，对 $j\in Z_+$，令

$$m_{j+1}^{\#}(\alpha) = \left|\cos\frac{\pi\alpha}{2^{j+1}}\right|^m,\quad 0\leqslant \alpha < 2^{j+1},$$

显然，$\{m_{j+1}^{\#}(\alpha)\}_\alpha$ 为周期是 $2^{j+1}Z$ 的序列. 注意到对固定的 α，

$$m_{j+1}^{\#}(\alpha) = 1 + O(2^{-2jm}),$$

所以

$$\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi\alpha) = \prod_{s=j+1}^{+\infty} m_s^{\#}(\alpha)$$

有意义且

$$\hat{\phi}_j^{\#}(2\pi\alpha) = \left| \frac{\sin \frac{\pi\alpha}{2^j}}{\frac{\pi\alpha}{2^j}} \right|^m, \quad \alpha \in Z.$$

再注意到当 $-2^{j-1} \leqslant k \leqslant 2^{j-1}$ 时，$\left| \frac{\sin \frac{\pi k}{2^j}}{\frac{\pi k}{2^j}} \right| \geqslant C$，所以由

$$\sum_{\alpha \in Z} \left| \hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k + 2^j\alpha)) \right|^2$$

$$= \sum_{\alpha \in Z} \left| \frac{\sin(2^{-j}\pi k + 2\pi\alpha)}{2^{-j}\pi k + 2\pi\alpha} \right|^{2m}$$

为 2^jZ-周期序列知，

$$\sum_{\alpha \in Z} \left| \hat{\phi}_j^{\#}(2\pi(k + 2^j\alpha)) \right|^2 \geqslant \left| \frac{\sin \frac{\pi k}{2^j}}{\frac{\pi k}{2^j}} \right|^2 \geqslant C > 0.$$

因此由定理 1.3.1.1 知，$\left\{ \phi_j\left(x - \frac{k}{2^j}\right) \right\}_{k=0}^{2^j-1}$ 为其生成空间 V_j 的基，而不是标准正交基，但我们仍可用§1.5最后给出的 $m_{1,j+1}$ 的构造方式，即

$$m_{1,j+1}^{\#}(k) = e^{i2^{-j}\pi k} \overline{m}_{j+1}^{\#}(k + 2^j), \quad k = 0, \cdots, 2^j - 1.$$

那么由 $\hat{\psi}_j^{\#}(2\pi\alpha) = m_{1,j+1}^{\#}(\alpha)\hat{\phi}_{j+1}^{\#}(2\pi\alpha)$ 定义的 $\psi_j(x)$ 使得

$$\left\{ \psi_j\left(x - \frac{l}{2^j}\right) \middle| l = 0, \cdots, 2^j - 1 \right\}$$

生成的 W_j 与 V_j 正交. 这样 $\psi_j(x)$ 便是我们所求的周期小波.

我们现在利用§1.6给出的理论举出另一个例子.

例 1.7.2 定义 $2^{j+1}Z$-周期序列 $m_{j+1}(k)(j\in Z_+)$如下：

$$m_{j+1}(k)=\begin{cases}1, & -2^{j-1}<k<2^{j-1},\\ \dfrac{1}{2}, & k=2^{j-1},\\ \dfrac{1}{2}, & k=-2^{j-1},\\ 0, & 2^{j-1}<|k|\leqslant 2^{j}.\end{cases}$$

显然 $m_{j+1}(k)$满足(1.6.6),(1.6.8)和(1.6.9)三式.由(1.6.7)式知,

$$a_j(\alpha)=\begin{cases}1, & -2^{j-1}<\alpha<2^{j-1},\\ \dfrac{1}{2}, & \alpha=2^{j-1},\\ \dfrac{1}{2}, & \alpha=-2^{j-1},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

这样由 $v_{j,k}(x)=\sum\limits_{\alpha\in Z}a_j(k+2^j\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(k+2^j\alpha)x}$ 知,

$$v_{j,k}(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kx}, & -2^{j-1}<k<2^{j-1},\\ \cos[2\pi(2^{j-1}x)], & k=2^{j-1}.\end{cases}$$

注意到对固定的 j 来说,$v_{j,k}(x)=v_{j,k+2^j}(x)$.因此

$$v_{j,k}(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kx}, & 0\leqslant k<2^{j-1},\\ \cos[2\pi(2^{j-1}x)], & k=2^{j-1},\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(k-2^j)x}, & 2^{j-1}<k<2^j.\end{cases}$$

§1.6的理论表明$\{V_j\}_{j\in Z_+}$为 $L^2([0,1])$的一个PMRA,其尺度函数序列为

$$\begin{aligned}\phi_j(x)&=\sum_{k=0}^{2^j-1}v_{j,k}(x)\\ &=\sum_{k=-2^{j-1}+1}^{2^{j-1}-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kx}+\cos[2\pi(2^{j-1}x)]\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin 2\pi(2^{j-1}x)}{\tan \pi x}.$$

序列 g_{j+1} 的选择为

$$g_{j+1}(k) = \begin{cases} 0, & -2^{j-1} < k < 2^{j-1}, \\ \gamma_j, & k = 2^{j-1}, \\ -\gamma_j, & k = -2^{j-1}, \\ \beta_{j,k}, & -2^j \leqslant k < -2^{j-1} \text{ 或 } 2^{j-1} < k < 2^j, \end{cases}$$

这里 $\gamma_j, \beta_{j,k}$ 为非 0 常数,从而 $u_{j,k}$ 为

$$u_{j,k}(x) = \begin{cases} \beta_{j,-2^j}\cos[2\pi(2^j x)], & k = 0, \\ \beta_{j,k-2^j}e^{i2\pi(k-2^j)x}, & 0 < k < 2^{j-1}, \\ 2i\gamma_j \sin[2\pi(2^{j-1}x)], & k = 2^{j-1}, \\ \beta_{j,k}e^{i2\pi x}, & 2^{j-1} < k < 2^j, \end{cases}$$

且

$$\{u_{j,k}(x) \mid k = 0, \cdots, 2^j - 1\}$$

为 $W_j(W_j \oplus V_j = V_{j+1})$ 的正交基. 因此

$$W_j = \operatorname{span}\left\{\psi_j\left(x - \frac{l}{2^j}\right) \middle| l = 0, \cdots, 2^j - 1\right\},$$

其中

$$\psi_j(x) = \sum_{k=-2^j+1}^{-2^{j-1}-1} \beta_{j,k}e^{i2\pi x} + \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j-1} \beta_{j,k}e^{i2\pi kx}$$
$$+ 2i\gamma_j \sin[2\pi(2^{j-1}x)] + \beta_{j,-2^j}\cos[2\pi(2^j x)]$$

是相应的周期小波.

第二章　一类标准正交周期小波

在这一章里，我们将从周期基函数出发给出一类非稳定的正交周期小波(参考文献[11]).所谓周期基函数就是具有正 Fourier 系数的连续可微周期函数(简称 PBF).这类函数是由 Schoenberg 于 1942 年引入的(见文献[16]).在本章里,我们用 $P(\theta)$表示一个 PBF,它的 Fourier 展开为 $P(\theta) = \sum_{m\in Z} p_m e^{m\theta}$，其中 $p_m > 0, p_m = p_{-m}$.

§2.1　尺 度 函 数

我们首先来构造与 $P(\theta)$相关的尺度函数.假设 $j\in Z_+$.我们考察如下空间

$$V_j := \operatorname{span}\{P(\theta - 2\pi k/j)\}_{k=0}^{j-1}.$$

这一节的目标是具体构造 $\phi_j \in V_j$ 使得

$$\{\phi_j(\theta - 2\pi k/j)\}_{k=0}^{j-1}$$

构成 V_j 的一个标准正交基.

显然 $P(\theta)$的 Fourier 级数可以写成下列形式：

$$P(\theta) = \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{m\equiv k \bmod j} p_m e^{im\theta}. \tag{2.1.1}$$

令 $P_k^j(\theta) := \sum_{m\equiv k \bmod j} p_m e^{im\theta}$. 以下我们将看到这个函数在我们的尺度函数和小波构造中是至关重要的.为此，我们给出它的有关性质.

性质 2.1.1　函数集$\{P_k^j\}_{k=0}^{j-1}$是 V_j 的一个标准正交基；P_k^j 和 P 具有同样的光滑性，而且 P_k^j 具有以下性质：

$$P_k^j(\theta - 2\pi l/j) = e^{-2\pi ikl/j} P_k^j(\theta), \tag{2.1.2}$$

$$P^j_{k+j}(\theta) = P^j_k(\theta), \tag{2.1.3}$$

$$P(\theta - 2\pi l/j) = \sum_{k=0}^{j-1} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} kl/j} P^j_k(\theta), \tag{2.1.4}$$

$$P^j_k(\theta) = \frac{1}{j}\sum_{l=0}^{j-1} P(\theta - 2\pi l/j)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} kl/j}, \tag{2.1.5}$$

$$\overline{P^j_k(\theta)} = P^j_{-k} = P^j_{j-k}(\theta). \tag{2.1.6}$$

证明 因为集合$\{P^j_k\}_{k=0}^{j-1}$中的函数彼此没有共同的频率成分，所以它们在 $L^2[0,2\pi]$中是两两正交的. 为了得到(2.1.2)式，我们首先注意到，如果 $m \equiv k \bmod j$，则有正整数 q 使得 $m = qj + k$. 因此 $m(-2\pi l/j) = -2\pi ql - 2\pi(kl/j)$. 进一步有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta - 2\pi l/j)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kl/j}.$$

因为上式右边第二个因子是不依赖于 m 的，所以(2.1.2)式成立. 明显地(2.1.3)式可由 P^j_k 的定义导出. 为证(2.1.4)式，可首先在(2.1.1)式中用 $\theta - 2\pi l/j$ 替换θ，再利用(2.1.2)式. 注意(2.1.4)式的右边是有限序列$\{P_0(\theta), \cdots, P_{n-1}(\theta)\}$的离散 Fourier 变换，所以对(2.1.4)式再作反变换则有(2.1.5)式. 由(2.1.5)式可以得到两个直接的结论，其一是 P^j_k 和 P 有同样的光滑性，其二是 P^j_k 属于 V_j. 因为$\{P^j_k\}_{k=0}^{j-1}$中每个元素非零并且两两正交，而且$\{P^j_k\}_{k=0}^{j-1}$张成 V_j(由(2.1.4)式可知)，因此$\{P^j_k\}_{k=0}^{j-1}$构成 V_j 的一个标准正交基.

以下仅需证(2.1.6)式. 由 P 是周期基函数的假设可知，P 的 Fourier 系数满足 $p_m = \bar{p}_m = p_{-m} > 0$，而且

$$\begin{aligned}\bar{P}^j_k(\theta) &= \sum_{m \equiv k \bmod j} \bar{p}_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta} \\ &= \sum_{m \equiv k \bmod j} p_{-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta} \\ &= \sum_{m \equiv -k \bmod j} p_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \\ &= P^j_{-k}(\theta).\end{aligned}$$

由(2.1.3)式，我们有 $P^j_{-k} = P^j_{j-k}$. 证毕.

注记 2.1.1 上述结果说明 V_j 的维数是 j，因此 $\{P(\theta-2\pi k/j)\}_{k=0}^{j-1}$ 是线性无关的并且也是 V_j 的一组基. 由(2.1.4)式以及离散 Fourier 变换的定义,我们有对任意的 $f\in V_j$，

$$f(\theta)=\sum_{l=0}^{j-1}c_l^jP(\theta-2\pi l/j)$$

当且仅当

$$f(\theta)=\sum_{k=0}^{j-1}\hat{c}_k^jP_k^j(\theta).$$

注记 2.1.2 在我们的构造中,P_k^j 的 L^2-范数发挥了非常重要的作用. 由 Parseval 定理，我们有

$$\nu_k^j:=\|P_k^j(\theta)\|^2=\sum_{m\equiv k\bmod j}2\pi p_m^2.$$

对(2.1.3)式和(2.1.6)式两边取范数，我们得到以下非常有用的恒等式

$$\nu_k^j=\nu_{k+j}^j=\nu_{j-k}^j. \tag{2.1.7}$$

下面，我们将定义函数 ϕ_j(即尺度函数),并证明它的平移形成 V_j 的标准正交基,且具有一些我们所需要的良好性质.

定理 2.1.1 假设 ϕ_j 由下式定义

$$\phi_j(\theta):=\sum_{k=0}^{j-1}\frac{P_k^j(\theta)}{\sqrt{j}\|P_k^j\|}=\sum_{k=0}^{j-1}\frac{P_k^j(\theta)}{\sqrt{j\nu_k^j}}, \tag{2.1.8}$$

则 $\{\phi_j(\theta-2\pi l/j)\}_{l=0}^{j-1}$ 构成 V_j 的一个标准正交基,ϕ_j 和 P 有相同的光滑度，而且 ϕ_j 的 Fourier 级数 $\phi_j(\theta)=\sum_{m\in Z}\phi_j^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$ 绝对收敛，其中

$$\phi_j^m=\frac{p_m}{\sqrt{j\nu_k^j}},m\equiv k\bmod j,\quad 0\leqslant k\leqslant j-1. \tag{2.1.9}$$

进一步有 ϕ_j 是实的且关于 θ 是偶函数.

证明 由(2.1.2)式和(2.1.8)式可得

$$\phi_j(\theta-2\pi l/j)=\sum_{k=0}^{j-1}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kl/j}}{\sqrt{j}\|P_k^j\|}P_k^j(\theta)$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1} \frac{e^{-2\pi i k l/j}}{\sqrt{j\nu_k^j}} P_k^j(\theta). \tag{2.1.10}$$

利用(2.1.10)式,(2.1.8)式以及 P_k^j 的正交性,则有

$$\begin{aligned}
&\langle \phi_j(\theta - 2\pi l/j), \phi_j(\theta - 2\pi l'/j)\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{k'=0}^{j-1} e^{-2\pi i k l/j} e^{2\pi i k' l'/j} \left\langle \frac{P_k^j(\theta)}{\sqrt{j}\,\|P_k^j\|}, \frac{P_{k'}^j(\theta)}{\sqrt{j}\,\|P_{k'}^j\|}\right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{k'=0}^{j-1} \frac{e^{-2\pi i k l/j} e^{2\pi i k' l'/j}}{j} \delta_{k,k'} \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} \frac{e^{2\pi i k(l'-l)/j}}{j} \\
&= \delta_{l,l'}.
\end{aligned}$$

其中最后一步，我们利用了逆离散 Fourier 变换. 这样 $\{\phi_j(\theta - l/j)\}_{l=0}^{j-1}$的正交性得证. ϕ_j 与 P 有相同的光滑性是由于P_k^j 与 P 有相同的光滑性(见性质 2.1.1). ϕ_j 的 Fourier 级数表示式由(2.1.9)式,(2.1.8)式和 P_k^j 的定义得到. ϕ_j 的 Fourier 级数绝对收敛是因为 ϕ_j 有连续可微性. 利用(2.1.8)式及(2.1.6)式,我们得到

$$\overline{\phi_j(\theta)} = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\overline{P_k^j(\theta)}}{\sqrt{j\nu_k^j}} = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{P_{j-k}^j(\theta)}{\sqrt{j\nu_{j-k}^j}}.$$

再改变上式中的求和指标，并利用 $P_0^j = P_j^j$ 及 $\nu_0^j = \nu_j^j$,可得

$$\overline{\phi_j(\theta)} = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{P_k^j(\theta)}{\sqrt{j\nu_k^j}} = \phi_j(\theta).$$

因此 ϕ_j 是实的. 又由于 ϕ_j 是周期的且有实的 Fourier 系数，故 ϕ_j 是偶函数. 证毕.

注记 2.1.3 现在我们知道 V_j 有三个基，它们是:可加细基 $\{\phi_j(\theta - 2\pi l/j)\}$; 基 $\{P_l^j(\theta)\}$;周期基函数基 $\{P(\theta - 2\pi l/j)\}$. 另外,对 $\forall f \in V_j$, 由(2.1.10)式及离散 Fourier 变换的定义可知

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{j-1} s_l^j \phi_j(\theta - 2\pi l/j)$$

当且仅当

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\hat{s}_k^j}{\sqrt{j\nu_k^j}} P_k^j(\theta). \tag{2.1.11}$$

另一方面，由注记 2.1.1，我们有

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{j-1} c_l^j P(\theta - 2\pi l/j)$$

当且仅当

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{j-1} \hat{c}_k^j P_k^j(\theta). \tag{2.1.12}$$

比较(2.1.11)式和(2.1.12)式我们可以得到 f 在可加细基和周期基函数基下的坐标关系为

$$\hat{c}_k^j = \frac{\hat{s}_k^j}{\sqrt{j\nu_k^j}}. \tag{2.1.13}$$

因为 $V_j \subset V_{2j}$，所以我们可以将 ϕ_j 在 $2j$ 尺度下展开

$$\phi_j(\theta) = \sum_{l=0}^{2j-1} a_l^{2j} \phi_{2j}(\theta - 2\pi l/2j). \tag{2.1.14}$$

这便是双尺度关系. 我们需要求系数 a_l^{2j}.

推论 2.1.1 a_l^{2j} 的离散 Fourier 变换满足

$$\hat{a}_k^{2j} = \sqrt{\frac{2\nu_k^{2j}}{\nu_k^j}}. \tag{2.1.15}$$

证明 由(2.1.1)式可知 $P_k^j = P_k^{2j} + P_{k+j}^{2j}$. 应用该式到(2.1.8)式并将求和换序，再利用 $\nu_{k+j}^j = \nu_k^j$，可知

$$\begin{aligned}\phi_j(\theta) &= \sum_{k=0}^{j-1} \frac{P_k^{2j}(\theta) + P_{k+j}^{2j}(\theta)}{\sqrt{j\nu_k^j}} \\ &= \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{1}{\sqrt{j\nu_k^j}} P_k^{2j}(\theta).\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

应用注记 2.1.3，将 j 换为 $2j$ 并利用(2.1.16)式可知(2.1.14)式中的 a_l^{2j} 的离散 Fourier 变换满足

$$\frac{\hat{a}_k^{2j}}{\sqrt{2j\nu_k^{2j}}} = 1/\sqrt{j\nu_k^j}.$$

求出 $\hat{a}_k^{2j}$ 即得(2.1.15)式. 证毕.

我们应当看到 a_l^{2j} 明显地依赖于j.因此我们构造的尺度函数和小波是不稳定的.

§2.2 小　　波

采样空间 V_j 是V_{2j}的真子空间，这样它在 V_{2j}中有非平凡的正交补，即

$$W_j := V_{2j} \ominus V_j.$$

我们希望构造一个函数 $\psi_j \in W_j$ 使得他的平移集

$$\{\psi_j(\theta - 2\pi k/j)\}_{k=0}^{j}$$

是 W_j 的标准正交基. 函数 ψ_j 即是小波.

由于$\{P_k^{2j}\}_{k=0}^{2j-1}$,$\{P_k^j\}_{k=0}^{j-1}$分别是 V_{2j}和V_j 的正交基,所以我们有以下关系式

$$P_k^j = P_k^{2j} + P_{k+j}^{2j}, \tag{2.2.1}$$

$$\|P_k^j\|^2 = \|P_k^{2j}\|^2 + \|P_{k+j}^{2j}\|^2, \tag{2.2.2}$$

$$\nu_k^j = \nu_k^{2j} + \nu_{k+j}^{2j}. \tag{2.2.3}$$

方程(2.2.1)式由(2.1.1)式导出. 对(2.2.1)式两边取范数即得(2.2.2)式. (2.2.3)式是(2.2.2)式的另一种表述.

类似于上节关于尺度函数的研究，我们首先定义一些函数，然后证明它们即是我们要找的小波.

定理 2.2.1　设 $\psi_j(\theta)$由下式定义

$$\psi_j(\theta) = \sum_{k=0}^{2j-1} e^{ik\pi/j}\sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}P_k^{2j}(\theta). \tag{2.2.4}$$

则$\psi_j(\theta)$是实的，与 $P(\theta)$有同样的光滑性，且$\{\psi_j(\theta - 2\pi k/j)\}_{k=0}^{j-1}$是 W_j 的一个标准正交基.另外 ψ_j 的 Fourier 级数

$$\psi_j(\theta) = \sum_{m\in Z}\psi_j^m e^{im\theta}$$

绝对收敛，其中

$$\psi_j^m = e^{ik\pi/j}\sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}P_m, m \equiv k\mathrm{mod}(2j),$$
$$0 \leqslant k \leqslant 2j-1. \tag{2.2.5}$$

证明 ψ_j 的光滑性论断由 P_k^{2j} 是 $P(\theta)$ 的平移的线性组合得出. ψ_j 是实的由以下计算得出:

$$\begin{aligned}\overline{\psi_j(\theta)} &= \sum_{k=0}^{2j-1} e^{-ik\pi/j}\sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}\,\overline{P_k^{2j}(\theta)} \\ &= \sum_{k=0}^{2j-1} e^{-ik\pi/j}\sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}P_{2j-k}^{2j}(\theta) \\ &= \sum_{k=1}^{2j} e^{-i(2j-k)\pi/j}\sqrt{\frac{\nu_{2j-k+j}^{2j}}{j\nu_{2j-k}^{2j}\nu_{2j-k}^j}}P_k^{2j}(\theta) \\ &= \sum_{k=1}^{2j} e^{ik\pi/j}\sqrt{\frac{\nu_{k-j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}P_k^{2j}(\theta) \\ &= \sum_{k=0}^{2j-1} e^{ik\pi/j}\sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}P_k^{2j}(\theta) \\ &= \psi_j(\theta).\end{aligned}$$

为证 $\{\psi_j(\theta-l/j)\}_{l=0}^{j-1}$ 是 W_j 的一个标准正交基,我们首先需要证明 $\psi_j(\theta-2\pi l/j)\in W_j$. 因为 $\{P_k^j\}_{k=0}^{j-1}$ 是 V_j 的一个标准正交基,所以证明 $\psi_j(\theta-2\pi l/j)\in W_j$ 等价于去证 $\psi_j(\theta-2\pi l/j)$ 和 P_k^j 正交. 由(2.1.2)式和(2.2.4)式可得

$$\psi_j(\theta-2\pi l/j) = \sum_{k=0}^{2j-1} e^{ik\pi(1-2l)/j}\sqrt{\frac{\nu_{j+k}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}P_k^{2j}(\theta). \tag{2.2.6}$$

由(2.2.1)式,(2.2.6)式及 P_k^{2j} 的正交性，我们有

$$\langle\psi_j(\theta-2\pi l/j),P_k^j\rangle$$
$$= e^{ik\pi(1-2l)/j}\sqrt{\frac{\nu_{j+k}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}\|P_k^{2j}\|^2 + e^{i(k+j)\pi(1-2l)/j}\sqrt{\frac{\nu_{2j+k}^{2j}}{j\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j}^j}}\|P_{k+j}^{2j}\|^2.$$

利用 $\nu_k^{2j}=\|P_k^{2j}\|^2$,我们可以简化上面方程为

$$
\begin{aligned}
&\langle \psi_j(\theta-2\pi l/j),P_k^j\rangle\\
&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi(1-2l)/j}\left(\sqrt{\frac{\nu_{j+k}^{2j}\nu_k^{2j}}{j\nu_k^j}}-\sqrt{\frac{\nu_{2j+k}^{2j}\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_{k+j}^j}}\right).
\end{aligned}
$$

因为 $\nu_k^j=\nu_{k+j}^j,\nu_k^{2j}=\nu_{k+2j}^{2j}$,所以上式右边为0,即 $\psi_j(\theta-2\pi l/j)$和 P_k^j 正交. 故 $\psi_j(\theta-2\pi l/j)$属于 $W_l(l=0,\cdots,j-1)$.

下面我们证明$\{\psi_j(\theta-2\pi l/j)\}_{l=0}^{j-1}$是 W_j 的一个标准正交基. 因为 W_j 的维数是j, 所以我们仅需证明该集合中元素正交. 由(2.2.6)式,P_k^{2j} 的正交性和 $\nu_k^{2j}=\|P_k^{2j}\|^2$,我们可得到$\{\psi_j(\theta-2\pi l/j)\}_{l=0}^{j-1}$的正交性:

$$
\begin{aligned}
&\langle \psi_j(\theta-2\pi l/j),\psi_j(\theta-2\pi l'/j)\rangle\\
&=\sum_{k=0}^{2j-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi(l'-l)/j}\left(\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^j}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{j-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi(l'-l)/j}\left\{\left(\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^j}\right)+(-1)^{2l-2l'}\left(\frac{\nu_{k+2j}^{2j}}{j\nu_{k+j}^j}\right)\right\}\\
&=\sum_{k=0}^{j-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi(l'-l)/j}\left(\frac{\nu_{k+j}^{2j}+\nu_k^{2j}}{j\nu_k^j}\right)\\
&=\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi(l'-l)/j}\\
&=\delta_{l,l'}.
\end{aligned}
$$

为得到 ψ_j 的 Fourier 级数, 只需利用(2.2.4)式与(2.1.1)式即可. 该级数绝对收敛是因为 ψ 至少连续可微. 证毕.

注记 2.2.1 如果我们将(2.1.2)式中的 j 换为 $2j$,并应用到(2.2.4)式,可得

$$\psi_j(\theta)=\sum_{k=0}^{2j-1}\sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}P_k^{2j}(\theta+\pi/j).$$

因此我们有

$$\psi_j(\theta-\pi/j)=\sum_{k=0}^{2j-1}\sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}P_k^{2j}(\theta). \tag{2.2.7}$$

如果我们将(2.2.7)式中的 P_k^{2j} 换成它的 Fourier 级数,我们可以发现 ψ_j 的 Fourier 系数是正的. 又因为 ψ_j 是实值的,所以可以断言 $\psi_j(\theta-\pi/j)$是周期基函数,且 θ 关于是偶的. 当然, 也可断言 ψ_j 关于$\theta=-\pi/j$ 对称.

因为小波 ψ_j 属于V_{2j},所以我们可以在 $2j$ 尺度下展开:

$$\psi_j(\theta)=\sum_{l=0}^{2j-1}b_l^{2j}\phi_{2j}(\theta-2\pi l/(2j)). \qquad (2.2.8)$$

该展示类似于双尺度关系式(2.1.14)式. 与双尺度关系式(2.1.14)式中的系数一样, b_l^{2j} 的离散 Fourier 变换满足如下关系:

推论 2.2.1 b_l^{2j} 的离散 Fourier 变换满足

$$\hat{b}_k^{2j}=e^{ik\pi/j}\sqrt{\frac{2\nu_{k+j}^{2j}}{\nu_k^j}}. \qquad (2.2.9)$$

证明 由注记 2.1.3 及(2.2.4)式,(2.2.8)式, 我们有

$$\frac{\hat{b}_k^{2j}}{\sqrt{2j\nu_k^{2j}}}e^{ik\pi/j}\sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}.$$

解出 $\hat{b}_k^{2j}$ 即是(2.2.9)式. 证毕.

§2.3 小波分解与重构

获得分解与重构公式的最有效途径是将函数以基$\{P_k^{2j}\}_{k=0}^{2j-1}$来展开. 首先我们将 $f\in V_{2j}=V_j\oplus W_j$ 按 ϕ_j 和 ψ_j 的平移展开得到

$$f(\theta)=\sum_{l=0}^{j-1}s_l^j\phi_j(\theta-2\pi l/j)+\sum_{l=0}^{j-1}d_l^j\psi_j(\theta-2\pi l/j). \qquad (2.3.1)$$

下面的引理给出 f 在$\{P_k^{2j}\}_{k=0}^{2j-1}$下的展式.

引理 2.3.1 如果 $f\in V_{2j}$有展式(2.3.1),则

$$f(\theta)=\sum_{k=0}^{2j-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{j\nu_k^j}}\hat{s}_k^j+\sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}e^{i\pi k/j}\hat{d}_k^j\right\}P_k^{2j}(\theta), \qquad (2.3.2)$$

其中 $\hat{s}_k^j$ 与 $\hat{d}_k^j$ 分别是 $\{s_l^j\}_{l=0}^{j-1}$ 和 $\{d_l^j\}_{l=0}^{j-1}$ 的离散 Fourier 变换.

证明 由(2.1.16)式和(2.1.2)式我们有

$$\begin{aligned}
&\phi_j(\theta - 2\pi l/j) \\
&= \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{e^{-2\pi i k l/(2j)}}{\sqrt{j\nu_k^j}} P_k^{2j}(\theta - 2\pi 2l/(2j)) \\
&= \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{e^{-2\pi i(2kl)/(2j)}}{\sqrt{j\nu_k^j}} P_k^{2j}(\theta) \\
&= \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{e^{-2\pi i k l/j}}{\sqrt{j\nu_k^j}} P_k^{2j}(\theta).
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

$\psi_j(\theta - 2\pi l/j)$ 的一个类似的表示已经在(2.2.6)式给出. 在(2.3.1)式中,用(2.3.3)式和(2.2.6)式的右边代替 $\phi_j(\theta - 2\pi l/j)$ 和 $\psi_j(\theta - 2\pi l/j)$,则我们有

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \sum_{l=0}^{j-1} s_l^j \left\{ \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{e^{-2\pi i k l/j}}{\sqrt{j\nu_k^j}} P_k^{2j}(\theta) \right\} \\
&\quad + \sum_{l=0}^{j-1} d_l^j \left\{ \sum_{k=0}^{2j-1} e^{i\pi k(1-2l)/j} \sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}} P_k^{2j}(\theta) \right\}.
\end{aligned}$$

我们也可以将上式变为

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \sum_{k=0}^{2j-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{j\nu_k^j}} \left(\sum_{l=0}^{j-1} s_l^j e^{-2\pi i k l/j} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}} e^{i\pi k/j} \left(\sum_{l=0}^{j-1} d_l^j e^{-2\pi i k l/j} \right) \right\} P_k^{2j}(\theta).
\end{aligned}$$

这样,由 $\hat{s}_k^j$ 和 $\hat{d}_k^j$ 的离散 Fourier 变换得到(2.3.2)式. 证毕.

作为(2.3.1)式的补充, f 也可以按 $2j$ 尺度展开,即

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{2j-1} s_l^{2j} \phi_{2j}(\theta - 2\pi l/(2j)). \tag{2.3.4}$$

由注记 2.1.3, 我们可以得到 f 在基 $\{P_k^{2j}\}_{k=0}^{2j-1}$ 下的展式:

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{\hat{s}_k^{2j}}{\sqrt{2j\nu_k^{2j}}} P_k^{2j}(\theta). \tag{2.3.5}$$

比较(2.3.5)式和(2.3.2)式,我们可以得到 $\hat{s}_k^{2j}$ 关于 $\hat{s}_k^j$ 和 $\hat{d}_k^j$ 的表达式,这即是重构公式的离散类似,这也是下面分解与重构定理的一部分.

定理 2.3.1 让 s_m^j 和 d_m^j 是周期为 j 的序列, s_l^{2j} 表示周期为 $2j$ 的序列. 如果 $\hat{s}_k^j$, $\hat{d}_k^j$ 和 $\hat{s}_k^{2j}$ 分别表示它们的离散 Fourier 变换,则重构公式是

$$\hat{s}_k^{2j} = \hat{s}_k^j\sqrt{\frac{2\nu_k^{2j}}{\nu_k^j}} + e^{ik\pi/j}\hat{d}_k^j\sqrt{\frac{2\nu_{k+j}^{2j}}{\nu_k^j}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 2j-1. \tag{2.3.6}$$

分解公式是

$$\left.\begin{cases} \hat{s}_k^j = \dfrac{1}{2}\left(\hat{s}_k^{2j}\sqrt{\dfrac{2\nu_k^{2j}}{\nu_k^j}} + \hat{s}_{k+j}^{2j}\sqrt{\dfrac{2\nu_{k+j}^{2j}}{\nu_k^j}}\right) \\ \hat{d}_k^j = \dfrac{1}{2}\left(\hat{s}_k^{2j}\sqrt{\dfrac{2\nu_{k+j}^{2j}}{\nu_k^j}} - \hat{s}_{k+j}^{2j}\sqrt{\dfrac{2\nu_k^{2j}}{\nu_k^j}}\right)e^{-k\pi i/j} \end{cases}\right\}, 0 \leqslant k \leqslant j-1. \tag{2.3.7}$$

证明 我们已经说明了如何得到(2.3.6)式.因此我们只需证(2.3.7)式.在(2.3.6)式中,将 k 换为 $k+j$,并注意 ν_k^j,$\hat{s}_k^j$ 及 $\hat{d}_k^j$ 是 j 周期的,ν_k^{2j} 是 $2j$ 周期的,则有

$$\hat{s}_{k+j}^{2j} = \hat{s}_k^j\sqrt{\frac{2\nu_{k+j}^{2j}}{\nu_k^j}} - e^{ik\pi/j}\hat{d}_k^j\sqrt{\frac{2\nu_k^{2j}}{\nu_k^j}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant j-1. \tag{2.3.8}$$

将(2.3.6)式中的 k 限制在 $0 \leqslant k \leqslant j-1$ 内, 比较(2.3.6)式和(2.3.8)式可得(2.3.7)式.证毕。

可见,在离散 Fourier 变换形式下,分解与重构公式是非常简单的.当然,在一般情况下,人们喜欢用逆离散 Fourier 变换和卷积来表述, 因为任何可用的算法都是用离散 Fourier 变换或快速 Fourier 变换计算卷积的.

§2.4 小波空间的稠密性

本节我们将证明$\bigcup_{N\geqslant 0} V_{2^N}$在$L^2[-\pi,\pi]$中是稠密的.

定理 2.4.1 设 P 是连续可微的周期基函数. 则 P 生成的采样空间的并在$L^2[-\pi,\pi]$中是稠密的.

证明 实际上我们将证明$\bigcup\limits_{N\geqslant 0} V_{2^N}$在 1 - 周期连续函数空间$C[-\pi,\pi]$中是稠密的. 我们用反证法来证.

假设定理 2.4.1 不成立,则存在一个泛函 $\rho\in C_\pi^*[-\pi,\pi]$, $\|\rho\|=1$ 使得

$$\rho\left(\bigcup_{N\geqslant 0} V_{2^N}\right)=0.$$

这样, 我们有

$$\rho(P(\theta-2\pi k/2^N))=0 \quad 对 \quad j\in Z \quad 及 N\geqslant 1 \quad 成立.$$

由 P 及其平移的连续性,我们有

$$\rho(P(\theta-\tilde{\theta}))=0, \quad \tilde{\theta}\in[-\pi,\pi]. \tag{2.4.1}$$

将 P 按照 Fourier 级数展开得

$$P(\theta)=\sum_{m\in Z} p_m e^{im\theta}. \tag{2.4.2}$$

因为 P 是连续可微的,所以它的 Fourier 级数一致且绝对收敛到 P. 由(2.4.1)式和(2.4.2)式我们有

$$0=\sum_{m\in Z} p_m e^{-im\tilde{\theta}} \rho(e^{im\theta}).$$

容易看到,上式右边的级数对任何 $\tilde{\theta}$ 一致且绝对收敛,因此定义了 $C[-\pi,\pi]$中的一个函数. 因为这个函数恒为零,所以它的 Fourier 系数也都为零. 又因为 $p_m>0$,所以 $\rho(e^{im\theta})=0(\forall m\in Z)$. 因此 $\rho=0$. 这与$\|\rho\|=1$ 矛盾. 证毕.

推论 2.4.1 集合$\{\phi_1(\theta)\}\bigcup_{N\geqslant 0}\{\psi_{2^N}(\theta-2\pi l/2^N)\}_{0\leqslant l\leqslant 2^N-1}$是 $L^2[-\pi,\pi]$的一个标准正交基.

§2.5 PBF-小波的角频局部性

在本节,我们将研究由周期基函数生成的尺度函数和小波的角频局部性.对于定义在直线上的函数,衡量它的局部性是考察它的方差

$$\mathrm{var}_f(t) := \int_R (t-t_0)^2 |f(t)|^2 \mathrm{d}t,$$

其中 $t_0 := \int_R t|f(t)|^2 dt$. 对于周期函数,方差的概念要比直线上的方差概念精细得多,这是因为角度在圆周上是不连续函数.在文献[18]中, Breitenberger 讨论了一种方差概念,这种方差在旋转变换下不变且可产生测不准原理的一个角距离的类似.

对于周期为 1 且范数是 1 的连续函数 f,我们定义

$$\tau(f) := \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} |f(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta. \tag{2.5.1}$$

正如 Breitenberger([18])指出的那样,如果我们把 $|f(\theta)|^2$ 看做复平面上的单位圆上的一个质量分布,则 $\tau(f)$便是该分布的质量中心.容易得到如下等式

$$\int_0^{2\pi} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\theta} - \tau(f)|^2 |f(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta = 1 - |\tau(f)|^2.$$

在文献[18]中, Breitenberger 证明了 $1-|\tau(f)|^2$ 的大小是 $|f(\theta)|^2$ 关于 τ 局部化有多好的一个好的度量工具.例如,他指出,如果 $|f(\theta)|^2$ 近似于 θ_0 的局部一点质量,那么 $\tau(f)$近似于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\theta_0}$且 $1-|\tau(f)|^2$ 趋于 0;反过来,如果 $1-|\tau(f)|^2=0$,那么对应于一点质量的分布局部在 $\tau(f)$点.虽然有许多种局部化衡量方法,但我们感觉 $1-|\tau(f)|^2$ 是一个自然的选择.所以我们给出连续周期函数 f 的圆方差如下:

$$\mathrm{var}_f(\theta) := 1 - |\tau(f)|^2. \tag{2.5.2}$$

我们将给出周期基函数的一般条件,使得其生成的尺度函数和小波有较好的局部性.我们需要一些记号:

$$\tau_s^j := \tau(\phi_j) \quad 和 \quad \tau_w^j := \tau(\psi_j). \tag{2.5.3}$$

我们要用性质 2.1.1 中的 P 和 ν_k^j 的 Fourier 系数来表示 τ_s^j 和 τ_w^j.

定理 2.5.1 如果 τ_s^j 和 τ_w^j 由(2.5.3)式定义,则

$$\tau_s^j = \frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m\equiv k(\mathrm{mod} j)}\frac{2\pi p_m p_{m+1}}{\sqrt{\nu_k^j\nu_{k+1}^j}}, \tag{2.5.4s}$$

$$\tau_w^j = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/j}}{j}\sum_{k=0}^{2j-1}\sum_{m\equiv k(\mathrm{mod}\ 2j)}\frac{2\pi p_m p_{m+1}\sqrt{\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j+1}^{2j}}}{\sqrt{\nu_k^{2j}\nu_{k+1}^{2j}\nu_k^j\nu_{k+1}^j}}. \tag{2.5.4w}$$

证明 由(2.1.9)式,(2.2.5)式,(2.5.1)式,(2.5.3)式及 Parseval 等式得到. 证毕.

为了估计 τ_s^j,τ_w^j 我们要对 P 的 Fourier 系数作一些假定,即 $p_m>0$, $p_m=p_{-m}$. 另外,我们也要假定序列

$$r_m := \frac{p_{m+1}}{p_m}-1 \tag{2.5.5}$$

是平方收敛的. 该假定可导出如下非常有用的引理.

引理 2.5.1 如果序列 r_m 是平方可积的且

$$\alpha_k^j := \sup\nolimits_{m\equiv k(\mathrm{mod} j)} r_m^2 \quad 和 \quad \beta := \inf\nolimits_{m\in Z}(1+r_m)^2, \tag{2.5.6}$$

则下面不等式成立:

$$\sum_{k=0}^{j-1}\alpha_k^j \leqslant \sum_{m\in Z} r_m^2 \quad 和 \quad \beta>0, \tag{2.5.7}$$

$$\sum_{m\equiv k(\mathrm{mod} j)} 2\pi(p_m-p_{m+1})^2 \leqslant \alpha_k^j\nu_k^j \quad 和 \quad \nu_{k+1}^j \geqslant \beta\nu_k^j. \tag{2.5.8}$$

证明 因为$\{r_m\}_{m\in Z}$是平方可积的,所以当 $m\to\pm\infty$时, $r_m\to 0$. 这样在 α_k^j 定义中的上确界可以达到,因此存在一个整数 $m_k\equiv k(\mathrm{mod} j)$使得 $\alpha_k^j=r_{m_k}^2$. 尽管 m_k 有可能不是惟一的,但我们可以选取模最小的使其惟一确定. 这样, 我们有

$$\sum_{k=0}^{j-1}\alpha_k^j = \sum_{k=0}^{j-1} r_{m_k}^2.$$

明显地，上式右边的和式中 m_k 是不同的. 所以(2.5.7)式的第一部分成立. 为证(2.5.7)式的另一部分，我们要注意以下事实：首先由(2.5.5)式，$p_{m+1}=(1+r_m)p_m$. 而 p_m 是正的，所以 $1+r_m>0$. 另外，在前面我们提到当 $m\to\pm\infty$ 时，$r_m\to 0$. 这样，$(1+r_m)^2$ 的最小值只对有限整数出现，而 $1+r_m>0$，所以 β 必为正.

现证(2.5.8)式. 由(2.5.5)式，我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m\equiv k(\mathrm{mod} j)} 2\pi(p_m-p_{m+1})^2\\
&=\sum_{m\equiv k(\mathrm{mod} j)} 2\pi r_m^2 p_m^2\\
&\leqslant \alpha_k^j \sum_{m\equiv k(\mathrm{mod} j)} 2\pi p_m^2.
\end{aligned}
$$

回想起 $\nu_k^j=\|P_k^j\|$，Parseval 等式及(2.1.1)式，我们有

$$
\nu_k^j=\sum_{m\equiv k(\mathrm{mod} j)} 2\pi p_m^2. \tag{2.5.9}
$$

将(2.5.9)式与上一不等式比较，就可得到(2.5.8)式的第一部分. 该引理的另一个不等式由下面的计算得到.

$$
\begin{aligned}
\nu_{k+1}^j&=\sum_{m\equiv k(\mathrm{mod} j)} 2\pi p_{m+1}^2\\
&=\sum_{m\equiv k(\mathrm{mod} j)} 2\pi(1+r_m)^2 p_m^2\\
&\geqslant \beta\sum_{m\equiv k(\mathrm{mod} j)} 2\pi p_m^2\\
&\geqslant \beta\nu_k^j.
\end{aligned}
$$

证毕.

下一个命题是关于尺度函数的局部性的.

定理 2.5.2 设序列 r_m 由(2.5.5)式定义且是平方可积的. 则对充分大的 j，

$$
\tau_s^j=1+O(1/j).
$$

证明 因为 p_m 是正的，所以由(2.5.4s)式知，$\tau_s^j>0$. 由 Schwarz 不等式，(2.5.1)式及 $\|\phi_j\|=1$ 可知，$\tau_s^j<1$. 这样我们仅需要证明对充分大的 j 有一个正常数 C，使得 $1-\tau_s^j\leqslant C/j$ 即可. 注意到

$$p_m p_{m+1} = \frac{1}{2}(p_m^2 + p_{m+1}^2 - (p_m - p_{m+1})^2),$$

所以我们有

$$\tau_s^j = \frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m\equiv k(\bmod j)} \frac{2\pi(p_m^2 + p_{m+1}^2 - (p_m - p_{m+1})^2)}{2\sqrt{\nu_k^j \nu_{k+1}^j}}.$$

在上述方程中利用(2.5.8)式的第一个不等式及(2.5.9)式，可以得到

$$\tau_s^j \geqslant \frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1}\left[\frac{\nu_k^j + \nu_{k+1}^j}{2\sqrt{\nu_k^j \nu_{k+1}^j}} - \frac{\alpha_k^j \nu_k^j}{2\sqrt{\beta(\nu_k^j)^2}}\right].$$

简化上面不等式，可以得到

$$\begin{aligned}\tau_s^j &\geqslant \frac{1}{j}\sum\nolimits_{k=0}^{j-1}\left(1 - \frac{\alpha_k^j}{2\sqrt{\beta}}\right)\\ &\geqslant 1 - \frac{1}{j}\,\frac{\sum_{k=0}^{j-1}\alpha_k^j}{2\sqrt{\beta}}\\ &\geqslant 1 - \frac{1}{j}\,\frac{\sum_{m\in Z}}{2\sqrt{\beta}} \quad (\text{由(2.5.7) 式}).\end{aligned}$$

因此 $1-\tau_s^j \leqslant C/j$. 证毕.

下面我们研究小波的局部性.

定理 2.5.3 设序列 r_m 由(2.5.5)式定义且是平方可积的. 则对充分大的 j,

$$|\tau_w^j| = 1 + O(1/j).$$

证明 由(2.5.4w)式,(2.5.8)式,(2.5.9)式和方程 $p_m p_{m+1} = \frac{1}{2}(p_m^2 + p_{m+1}^2 - (p_m - p_{m+1})^2)$ 可得

$$|\tau_w^j| = \frac{1}{j}\sum_{k=0}^{2j-1}\left[\sum_{m\equiv k(\bmod 2j)} 2\pi(p_m^2 + p_{m+1}^2) - 2\pi(p_m - p_{m+1})^2\right] \times \frac{\sqrt{\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j+1}^{2j}}}{2\sqrt{\nu_k^{2j}\nu_{k+1}^{2j}\,\nu_k^j\nu_{k+1}^j}}$$

$$\geqslant \frac{1}{j}\sum_{k=0}^{2j-1}\left[\frac{(\nu_k^{2j}+\nu_{k+1}^{2j})\sqrt{\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j+1}^{2j}}}{2\sqrt{\nu_k^{2j}\nu_{k+1}^{2j}\nu_k^j\nu_{k+1}^j}}-\frac{\alpha_k^{2j}\nu_k^{2j}\sqrt{\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j+1}^{2j}}}{2\sqrt{\beta(\nu_k^{2j})^2\nu_k^j\nu_{k+1}^j}}\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{j}\sum_{k=0}^{2j-1}\left[\frac{(\nu_k^{2j}+\nu_{k+1}^{2j})\sqrt{\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j+1}^{2j}}}{2\sqrt{\nu_k^{2j}\nu_{k+1}^{2j}\nu_k^j\nu_{k+1}^j}}-\frac{\alpha_k^{2j}}{2\sqrt{\beta}}\sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j+1}^{2j}}{\nu_k^j\nu_{k+1}^j}}\right].$$

由(2.2.3)式,我们得到 $\nu_{k+j}^{2j}\leqslant\nu_{k+j}^j$, $\nu_{k+j+1}^{2j}\leqslant\nu_{k+j+1}^j$. 因此有

$$\sqrt{\frac{\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j+1}^{2j}}{\nu_k^j\nu_{k+1}^j}}\leqslant 1.$$

应用该不等式和(2.5.7)式到再上一个不等式可得

$$|\tau_w^j|\geqslant\frac{1}{j}\left\{\sum_{k=0}^{2j-1}\frac{(\nu_k^{2j}+\nu_{k+1}^{2j})\sqrt{\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j+1}^{2j}}}{2\sqrt{\nu_k^{2j}\nu_{k+1}^{2j}\nu_k^j\nu_{k+1}^j}}\right\}-\frac{C}{j},\tag{2.5.10}$$

其中 C 和定理 2.5.2 中的 C 一样,即 $C=\sum_{m\in Z}\gamma_m^2/(2\sqrt{\beta})$.

我们定义 S_j 为(2.5.10)式右边大括号中的式子. 以下我们需要对它进行估计. 把 S_j 定义中的求和分成两部分并进行适当处理,可得

$$S_j=\sum_{k=0}^{j-1}\left[\frac{(\nu_k^{2j}+\nu_{k+1}^{2j})\sqrt{\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j+1}^{2j}}}{2\sqrt{\nu_k^{2j}\nu_{k+1}^{2j}\nu_k^j\nu_{k+1}^j}}+\frac{(\nu_{k+j}^{2j}+\nu_{k+j+1}^{2j})\sqrt{\nu_{k+2j}^{2j}\nu_{k+2j+1}^{2j}}}{2\sqrt{\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j+1}^{2j}\nu_{k+j}^j\nu_{k+j+1}^j}}\right].$$

因为 ν_k^j 是 j 周期的, ν_k^{2j} 是 $2j$ 周期的,所以上面方程可以写成

$$S_j=\sum_{k=0}^{j-1}\left[\frac{(\nu_k^{2j}+\nu_{k+1}^{2j})\sqrt{\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j+1}^{2j}}}{2\sqrt{\nu_k^{2j}\nu_{k+1}^{2j}\nu_k^j\nu_{k+1}^j}}+\frac{(\nu_{k+j}^{2j}+\nu_{k+j+1}^{2j})\sqrt{\nu_k^{2j}\nu_{k+1}^{2j}}}{2\sqrt{\nu_{k+j}^{2j}\nu_{k+j+1}^{2j}\nu_k^j\nu_{k+1}^j}}\right].$$

再结合(2.2.3)式,我们有

$$S_j=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(1/\nu_k^{2j}+1/\nu_{k+1}^{2j}+1/\nu_{k+j}^{2j}+1/\nu_{k+j+1}^{2j})}{\sqrt{(1/\nu_k^{2j}+1/\nu_{k+j}^{2j})(1/\nu_{k+1}^{2j}+1/\nu_{k+j+1}^{2j})}}.$$

注意到以上和式都可以写作$(X+Y)/\sqrt{XY}$,因此有

$$S_j \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j-1} 2 = j. \qquad (2.5.11)$$

结合(2.5.10)式和(2.5.11)式可得

$$|\tau_w^j| \geqslant 1 - C/j.$$

因为$|\tau_w^j| \leqslant 1$,所以$|1-|\tau_w^j|| \leqslant C/j$. 证毕.

把定理2.5.2和定理2.5.3结合起来即得

定理 2.5.4 如果序列 r_m 由(2.5.5)式定义且是平方可积的,则对充分的大 j,

$$\mathrm{var}_{\phi_j}(\theta) = O(1/j) \quad \mathrm{var}_{\psi_j}(\theta) = O(1/j).$$

§2.6 角频测不准原理

在量子力学中,测不准原理表示位置和动量两种偏差的关系. 在信号分析中,时间和频率间也有类似的测不准原理. 在[18], Breitenberger 讨论了角频不确定关系.

为了描述角频测不准原理,我们首先回顾 l_z 的方差,这里 l_z 是角动量算子 $L_z = \mathrm{i}h\partial_\theta z$-分量的期望值. l_z 的方差为

$$\mathrm{var}_f(l_z) = \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta) L_z^2 f(\theta) \mathrm{d}\theta - \left(\int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta) L_z f(\theta) \mathrm{d}\theta\right)^2,$$

其中 f 是周期光滑函数且范数为1. 如果关于角度 θ 的变差 var_f 由(2.5.2)式给出,则角/角动量测不准关系的变差类似是

$$\frac{\mathrm{var}_f(l_z)\mathrm{var}_f(\theta)}{1-\mathrm{var}_f(\theta)} \geqslant \frac{1}{4}h^2. \qquad (2.6.1)$$

这也可以用类似标准位置动量测不准关系来表述. 定义关于 l_z 的传播为 $\Delta l_z := \sqrt{\mathrm{var}_f(l_z)}$. 对于角度变量,我们定义其偏差为

$$\Delta\theta := \sqrt{\frac{\mathrm{var}_f(\theta)}{1-\mathrm{var}_f(\theta)}}.$$

则角/角动量测不准关系变成我们熟悉的形式

$$\Delta l_z \Delta\theta \geqslant h/2.$$

由(2.6.1)式,我们很容易得到角频测不准关系. 首先我们可证如果 f 有 Fourier 展开

$$f(\theta)=\sum_{m\in Z}f_m e^{im\theta},$$

则

$$\operatorname{var}_f(l_z)=2\pi h^2\sum_{m\in Z}m^2|f_m|^2-h^2\left(2\pi\sum_{m\in Z}m|f_m|^2\right)^2.$$

我们按下式定义 f 的频率变差 $\operatorname{var}_f(m)$

$$h^2\operatorname{var}_f(m):=\operatorname{var}_f(l_z),\tag{2.6.2}$$

以及

$$\Delta m=\sqrt{\operatorname{var}_f(m)}.$$

则我们有

$$\Delta m\Delta\theta\geqslant\frac{1}{2}.\tag{2.6.3}$$

这就是角频测不准原理. 对于上一节构造的尺度函数和小波,我们要估计不确定窗口 $\Delta m\Delta\theta$ 的大小. 首先,我们给出一个共同的下界.

定理 2.6.1 如果 $j\geqslant3$,生成尺度函数和小波的周期基函数 P 是充分光滑的,且其 Fourier 系数满足 $\sum_{m\in Z}m^2p_m^2<\infty$,则对 $f=\phi_j$ 或者 $f=\psi_j$ 都有

$$\Delta m\geqslant(\sqrt{3}j/6)(1-3/j)^{3/2}.\tag{2.6.4}$$

证明 因为尺度函数 ϕ_j 是实函数,所以它的 Fourier 系数满足 $\phi_m^j=\bar{\phi}^j_{-m}$. 因此由(2.6.2)式可得

$$\operatorname{var}_{\phi_j}(m)=2\pi\sum_{m\in Z}m^2|\phi_m^j|^2.\tag{2.6.5}$$

利用(2.1.9)式,重写上式为

$$\operatorname{var}_{\phi_j}(m)=2\pi\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m\equiv k(\mathrm{mod}\,j)}\frac{m^2p_m^2}{j\nu_k^j}.\tag{2.6.6}$$

这和(2.6.6)式导致以下不等式

$$\mathrm{var}_{\phi_j}(m) \geqslant \sum_{k=0}^{j-1} \min_{m \equiv k \bmod j}\{m^2\} \frac{\sum_{m \equiv k(\bmod j)} 2\pi p_m^2}{j\nu_k^j}$$

$$\geqslant \frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1} \min_{m \equiv k \bmod j}\{m^2\}. \tag{2.6.7}$$

容易验证

$$\min_{m \equiv k \bmod j}\{m^2\} = \begin{cases} k^2, & \text{如果 } 0 \leqslant k \leqslant [j/2], \\ (j-k)^2, & \text{如果}[j/2]+1 \leqslant k \leqslant j-1. \end{cases} \tag{2.6.8}$$

由(2.6.7)式和(2.6.8)式可知,

$$\mathrm{var}_{\phi_j}(m) \geqslant (1/j)\left\{\sum_{k=0}^{[j/2]} k^2 + \sum_{k=[j/2]+1}^{j-1} (j-k)^2\right\}$$

$$\geqslant (2/j)\sum_{k=1}^{[j/2]-1} k^2$$

$$\geqslant (1/(3j))([j/2]-1)(2[j/2]-1)([j/2])$$

$$\geqslant (1/(12j))(j-3)(j-2)(j-1)$$

$$\geqslant (1/12)j^2(1-3/j)^3. \tag{2.6.9}$$

将上式两边开方并利用 Δm 的定义即得(2.6.4)式.下面我们转到小波情形的研究.

因为小波是实函数,则其 Fourier 系数满足 $\psi_m^j = \bar{\psi}^j_{-m}$.因此由(2.6.2)式我们有

$$\mathrm{var}_{\psi_j}(m) = 2\pi \sum_{m \in Z} m^2 |\psi_m^j|^2. \tag{2.6.10}$$

再利用(2.6.10)式,(2.2.5)式和(2.5.9)式可得

$$\mathrm{var}_{\psi_j}(m) = \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^j} \sum_{m \equiv k \bmod 2j} \frac{2\pi m^2 p_m^2}{\nu_k^{2j}}$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{2j-1} \min_{m \equiv k \bmod 2j}\{m^2\} \frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^j}. \tag{2.6.11}$$

由此不等式以及(2.6.8)式,(2.1.7)式,(2.2.3)式,将 j 换为 $2j$ 后可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}_{\psi_j}(m) &\geqslant \sum_{k=0}^{j-1} k^2 \frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^j} + \sum_{k=j}^{2j-1} (2j-k)^2 \frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^j} \\
&\geqslant \sum_{k=0}^{j-1} k^2 \frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^j} + \sum_{k=0}^{j-1} (j-k)^2 \frac{\nu_{k+2j}^{2j}}{j\nu_{k+j}^j} \\
&\geqslant \sum_{k=0}^{j-1} \min\{k^2,(j-k)^2\} \left(\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^j} + \frac{\nu_{k+2j}^{2j}}{j\nu_{k+j}^j} \right) \\
&\geqslant \sum_{k=0}^{j-1} \min\{k^2,(j-k)^2\} \left(\frac{\nu_{k+j}^{2j} + \nu_k^{2j}}{j\nu_k^j} \right) \\
&\geqslant (1/j) \sum_{k=0}^{j-1} \min\{k^2,(j-k)^2\} \\
&\geqslant (1/j) \left[\sum_{k=0}^{[j/2]} k^2 + \sum_{k=[j/2]+1}^{j-1} (j-k)^2 \right]. \qquad (2.6.12)
\end{aligned}
$$

因为(2.6.12)式的右边等于(2.6.9)式的右边,所以剩下的证明与尺度函数的讨论完全相同.证毕.

我们现在希望得到 Δm 的上界.为此,我们需要对周期基函数 P 的 Fourier 系数附加一些条件.请看以下命题.

命题 2.6.1 设 $\beta \geqslant \alpha > 3/2$. 如果在正常数 C_1, C_2 使得 p_m 满足

$$C_1 m^{-\beta} \leqslant p_m \leqslant C_2 m^{-\alpha}, \quad m \geqslant 1, \qquad (2.6.13)$$

则在正常数 C 使得对 ϕ_j 和 ψ_j 都有

$$\Delta m \leqslant C j^{1+\beta-\alpha}. \qquad (2.6.14)$$

证明 我们首先对尺度函数 ϕ_j 来证.因为 ϕ_j 是实的,所以 $|\phi_m^j| = |\phi_{-m}^j|$,我们可以将(2.6.5)式重写为

$$\mathrm{var}_{\phi_j}(m) = 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} m^2 |\phi_m^j|^2. \qquad (2.6.15)$$

将上面求和按 $m \equiv k \bmod j$ 即 $m = k + lj, j = 0, 1, \cdots$ 分成 j 部分,并用(2.1.9)式代替 ϕ_{k+lj}^j,得

$$\mathrm{var}_{\phi_j}(m) = \frac{4\pi}{j} \sum_{k=1}^{j} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+lj)^2 p_{k+lj}^2}{\nu_k^j}. \qquad (2.6.16)$$

利用(2.6.13)式的上界可得

$$\mathrm{var}_{\phi_j}(m) \leqslant \frac{4C_2^2\pi}{j}\sum_{k=1}^{j}\frac{k^{2-2\alpha}}{\nu_k^j}\left(1+\frac{k}{(2\alpha-3)j}\right)$$

$$\leqslant \frac{8C_2^2(\alpha-1)\pi}{(2\alpha-3)j}\sum_{k=1}^{j}\frac{k^{2-2\alpha}}{\nu_k^j}.$$

由(2.5.9)式,(2.6.13)式及 $\nu_k^j \geqslant 2\pi p_k^2 \geqslant 2\pi C_1^2 k^{-2\beta}$,我们可从不等式导出

$$\mathrm{var}_{\phi_j}(m) \leqslant \left(\frac{4(\alpha-1)C_2^2}{j(2\alpha-3)C_1^2}\right)\sum_{k=1}^{j}k^{2+2(\beta-\alpha)}$$

$$\leqslant \frac{\alpha-1}{2\alpha-3}\left(\frac{2C_2}{C_1}\right)^2 j^{2+2(\beta-\alpha)}. \qquad (2.6.17)$$

为了研究小波情形,我们首先从(2.6.11)式,(2.6.3)式,(2.6.6)式,(2.6.17)式可得以下不等式

$$\mathrm{var}_{\psi_j}(m) = \sum_{k=0}^{2j-1}\frac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^j}\sum_{m\equiv k \bmod 2j}\frac{2\pi m^2 p_m^2}{\nu_k^{2j}}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{2j-1}\sum_{m\equiv k \bmod 2j}\frac{2\pi m^2 p_m^2}{j\nu_k^{2j}}$$

$$\leqslant \mathrm{var}_{\phi_{2j}}(m)$$

$$\leqslant C_3^2(2j)^{2+2(\beta-\alpha)}$$

$$\leqslant C_3^2 2^{2+2(\beta-\alpha)} j^{2+2(\beta-\alpha)}. \qquad (2.6.18)$$

从 Δm 的定义,结合(2.6.17)式和(2.6.18)式及不等式 $C_3 \leqslant C$ 可以得到(2.6.14)式. 证毕.

注记 2.6.1 如果在命题 2.6.1 中 $\alpha=\beta$,则对于尺度函数和小波都有 $\Delta m \leqslant Cj$. 另外,如果(2.6.13)式成立,则定理 2.6.1 的条件也成立. 在此情形有 $\Delta m = O(j)$,即 Δm 是最佳的.

下面,我们在一定条件下来估计不确定窗的大小.

推论 2.6.1 假定对 $\beta=\alpha>3/2$, p_m 满足(2.6.13)式,又假定 r_m 由(2.5.5)式定义且是平方可积的, 则对尺度函数和小波都有

$$\Delta m \Delta\theta = O(\sqrt{j}). \tag{2.6.19}$$

证明 由定理 2.5.4，我们有 $\Delta\theta^2 = \mathrm{var}_f(\theta)/(1-\mathrm{var}_f(\theta)) = O(1/j)$. 所以 $\Delta\theta = O(1/\sqrt{j})$. 另一方面，由注记 2.6.1，有 $\Delta m = O(j)$. 综合这两个结论我们可得(2.6.19)式. 证毕.

§2.7 例　子

本节的主要目的是提供一些例子，使它们满足本章第 5,6 节中的条件.

首先我们回顾一些有关 Fourier 级数的基本事实. 如果 f 和 g 是以 2π 为周期的连续函数，其 Fourier 系数为 f_m 和 g_m. 定义 f 和 g 的卷积为

$$f * g(\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta - \phi) g(\phi) \mathrm{d}\phi.$$

则 $f * g(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续函数，其 Fourier 系数为 $f_m g_m$. 我们将利用这个事实去改造 PBF 类.

命题 2.7.1 设 2π 周期函数 f_m 和 g_m 是实值平方可积的偶函数. 如果对所有的 m，$f_m g_m$ 都是正的且级数 $\sum_{m\in Z} |m f_m g_m|$ 是收敛的. 则 $P := f * g$ 是一个周期基函数，且若序列

$$\left\{\frac{|f_{m+1}|}{|f_m|} - 1\right\}_{m\in Z} \in l^2$$

和

$$\left\{\frac{|g_{m+1}|}{|g_m|} - 1\right\}_{m\in Z} \in l^2,$$

则序列

$$\left\{\frac{f_{m+1}g_{m+1}}{f_m g_m} - 1\right\}_{m\in Z} \in l^2.$$

进一步，如果 $|f_m|$ 和 $|g_m|$ 满足

$$C_1 m^{-\beta_f} \leqslant |f_m| \leqslant C_2 m^{-\alpha_f},$$

$$C_1 m^{-\beta_g} \leqslant |g_m| \leqslant C_2 m^{-\alpha_g},$$

$(m\geqslant 1)$且 $\alpha_f+\alpha_g>3/2$，则有 $f_m g_m$ 满足(2.6.13)式且 $\alpha=\alpha_f+\alpha_g$，$\beta=\beta_f+\beta_g$.

证明 记 $r_m=f_{m+1}g_{m+1}/f_m g_m-1$，$r_m^f=f_{m+1}/f_m-1$，$r_m^g=g_{m+1}/g_m-1$，则

$$r_m=(r_m^f+1)(r_m^g+1)-1=r_m^f r_m^g+r_m^f+r_m^g.$$

再由 $r_m^f\in l^2$ 和 $r_m^g\in l^2$，即得 $r_m\in l^2$. 证毕.

我们要构造的 PBF 类一般是迭代产生的. 我们首先从以下分段光滑函数出发

$$\Re_2(\theta):=1+\sum_{m\neq 0}\frac{e^{im\theta}}{m^2}=1+\sum_{m=1}^{\infty}2\cos(m\theta)/m^2. \tag{2.7.1}$$

以上级数收敛到一个已知函数. 由[15, p31]，我们知道 $\Re_2(\theta)$在 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上的限制为

$$\Re_2(\theta)=1+\frac{3\theta^2-6\pi\theta+2\pi^2}{6}=\frac{6-\pi^2}{6}+\frac{1}{2}(\theta-\pi)^2. \tag{2.7.2}$$

我们通过下面迭代地定义其他函数

$$\Re_{2\gamma}:=\Re_2*\Re_{2\gamma-2},\quad \gamma=2,3,\cdots. \tag{2.7.3}$$

$\Re_{2\gamma}$有以下性质：

定理 2.7.1 对 $\gamma\geqslant 1$，$\Re_{2\gamma}$是 2π 周期的连续函数，且其 Fourier 展式为

$$\Re_{2\gamma}(\theta)=1+\sum_{m\neq 0}\frac{e^{im\theta}}{m^{2\gamma}}=1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(m\theta)}{m^{2\gamma}}. \tag{2.7.4}$$

对 $\gamma\geqslant 2$，$\Re_{2\gamma}$是 $2\gamma-2$ 阶连续可微的周期基函数，它的 Fourier 系数满足定理 2.5.4 和命题 2.6.1 中的条件($\alpha=\beta=2\gamma$). 在区间 $-1/2\leqslant\theta 1/2$，对于 $\gamma\geqslant 1$，每个 $\Re_{2\gamma}$是关于θ 的2γ 次多项式. 最后我们有，对 $0\leqslant\theta 2\pi$，$|z|<1$，

$$\Upsilon(z,\theta):=\frac{\pi\cosh(z(\theta-\pi))}{z\sinh(\pi z)}-\frac{1}{z^2}$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{\infty}(-1)^{\gamma+1}z^{2\gamma-2}(\mathfrak{R}_{2\gamma}(\theta)-1), \qquad (2.7.5)$$

是多项式$\mathfrak{R}_{2\gamma}\big|_{[0,2\pi]}$的生成函数.

证明 利用归纳法及(2.7.1)式可证(2.7.4)式. $\mathfrak{R}_{2\gamma}$展式中系数的衰减性可导出 $\mathfrak{R}_{2\gamma}$的光滑性. 进一步,因为 $\mathfrak{R}_2$ 的系数明显满足定理 2.5.4 和命题 2.6.1 中的条件($\alpha=\beta=2\gamma$),由命题 2.7.1, $\mathfrak{R}_{2\gamma}$的系数也满足这些条件.

$\mathfrak{R}_{2\gamma}$在 $0\leqslant\theta 2\pi$ 上的限制是次数为 2γ 的多项式由以下讨论得到. 首先我们已证 $\gamma=1$ 时 $\mathfrak{R}_2$ 是由(2.7.2)式给出. 现在考虑 $\gamma>1$ 的情况. 微分(2.7.4)式可以得到

$$\mathfrak{R}''_{2\gamma}(\theta)=1-\mathfrak{R}_{2\gamma-2}(\theta), \qquad (2.7.6)$$

这对所有的 θ 和 $\gamma\geqslant 2$ 都成立. 由(2.7.4)式我们有 $\mathfrak{R}_{2\gamma}(0)=1+2\sum_{m=1}^{\infty}m^{-2\gamma}$ 及 $\mathfrak{R}'_{2\gamma}(0)=0$. 将(2.7.6)式积分

$$\mathfrak{R}_{2\gamma}(\theta)=1+2\sum_{m=1}^{\infty}m^{-2\gamma}+\int_0^{\theta}\int_0^{\psi}(1-\mathfrak{R}_{2\gamma-2}(\phi))\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\psi. \qquad (2.7.7)$$

如果 $\mathfrak{R}_{2\gamma-2}(\theta)$在$[0,2\pi]$是 $2\gamma-2$ 次多项式,则由(2.7.7)式立即推断 $\mathfrak{R}_{2\gamma}(\theta)$在$[0,2\pi]$是 2γ 次多项式.

为建立(2.7.5)式,我们从[59,p190,问题 8]中的级数出发:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\sin(m\theta)}{m^2+z^2}=\frac{\pi\sinh(z(\pi-\theta))}{2\sinh(\pi z)}, \quad 0<\theta<2\pi. \qquad (2.7.8)$$

对(2.7.8)式在$[0,2\pi]$上积分得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\cos(m\theta)}{m^2+z^2}=\frac{1/2\cosh(z(1/2-\theta))}{2z\sinh(1/2z)}+C(z).$$

我们需要估计 $C(z)$. 让 $\theta\to 0$,则

$$C(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2+z^2}-\frac{1/2\coth(z/2)}{2z}.$$

以上方程右边的级数是从 $\cosh(z)$的 Mittag-Leffler 展开得到的.

实际上由[59, pp136, 例子 7], 我们发现 $\sum_{m=1}^{\infty}(m^2+z^2)^{-1} = \pi\coth(\pi z)/2z - 1/(2z^2)$. 因此 $C(z) = -1/(2z^2)$. 这样我们有

$$2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(m\theta)}{m^2+z^2} = \frac{\pi\cosh(z(\pi-\theta))}{z\sinh(\pi z)} - \frac{1}{z^2} = \Upsilon(z,\theta), \tag{2.7.9}$$

其中 $0<\theta<2\pi$, $|z|<1$. 再由几何级数的性质可得

$$(m^2+z^2)^{-1} = \sum_{\gamma=1}^{\infty}(-1)^{\gamma+1}z^{2\gamma-2}m^{2\gamma}.$$

利用(2.7.9)式, 改变求和顺序, 我们得到

$$\begin{aligned}\Upsilon(z,\theta) &= \sum_{\gamma=1}^{\infty}(-1)^{\gamma}z^{2\gamma-2}\left(2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(m\theta)}{m^2\gamma}\right)\\ &= \sum_{\gamma=1}^{\infty}(-1)^{\gamma+1}z^{2\gamma-2}(\Re_{2\gamma}(\theta)-1).\end{aligned}$$

证毕.

注记 2.7.1 $\Re_{2\gamma}$的周期性和偶函数性得出多项式$\Re_{2\gamma}|_{[0,2\pi]}$的对称性. 下面是用 Maple V 算出的一些例子:

$$\Re_4(\theta) = \frac{360-7\pi^4}{360} + \frac{\pi^2(\theta-\pi)^2}{12} - \frac{(\theta-\pi)^4}{24},$$

$$\Re_6(\theta) = \frac{15120-31\pi^6}{15120} + \frac{7\pi^4(\theta-\pi)^2}{720} - \frac{\pi^2(\theta-\pi)^4}{144} + \frac{(\theta-\pi)^6}{720},$$

$$\begin{aligned}\Re_8(\theta) = &\frac{604800-127\pi^8}{604800} + \frac{31\pi^6(\theta-\pi)^2}{30240} - \frac{7\pi^4(\theta-\pi)^4}{8640}\\ &+ \frac{\pi^2(\theta-\pi)^6}{4320} - \frac{(\theta-\pi)^8}{40320}.\end{aligned}$$

下面我们将其应用到 PBF p. 为获得 ϕ_j, 我们需要用 P 来表示 ϕ_j. 将 $f(\theta) = \phi_j$ 用到(2.1.11)式, 比较方程的右边可得 $s_l^j = \delta_{l,0}$. 该序列的 DFT 是常数序列 $\hat{s}_k^j = 1$. 那么方程(2.1.13)式推出

$$\hat{c}_k^j = \frac{1}{\sqrt{j\nu_k^j}}.$$

对 $c_k^j = 1$, 取逆 DFT 并用到(2.1.12)式中, 则

$$\phi_j(\theta) = \sum_{l=0}^{j-1} c_l^j P(\theta - 2\pi l/j), \qquad (2.7.10)$$

其中 $\hat{c}_k^j = \dfrac{1}{\sqrt{j\nu_k^j}}$.

ψ_j 可以类似地得到.由(2.2.4)式和(2.1.12)式可得

$$\psi_j(\theta) = \sum_{l=0}^{2j-1} c_l^{2j} P(\theta - 2\pi l/(2j)), \qquad (2.7.11)$$

其中 $\hat{c}_k^{2j} = e^{ik\pi/j}\sqrt{\dfrac{\nu_{k+j}^{2j}}{j\nu_k^{2j}\nu_k^j}}$.

§2.8 算　　法

本节,我们给出 PBF 小波分析的一种算法.我们的初始采样空间是 V_{2^N}.

第一步. 给出函数 f 在最大采样空间 V_{2^N} 中的数据(这有多种途径,以下涉及到一些).一般说来,f 有下面形式

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{2^N-1} c_l^{2^N} P(\theta - 2\pi l/2^N).$$

其中 P 是 PBF.对 $c_l^{2^N}$ 作 FFT,并通过(2.1.13)式计算尺度函数系数的最高水平的 FFT.

第二步. 使用分解公式(2.3.7)计算尺度函数和小波系数在 2^{N-1}水平的 FFT.重复 j 次直到算出所有水平的小波系数 FFT.

第三步. 对给定的水平,用逆 FFT 算出在同一水平的小波系数.我们可以利用系数检测噪音,奇性等等,也可以对系数滤波来去噪.

第四步. 用 FFT 处理系数.用重构公式(2.3.6)得到所有水平的尺度函数系数的 FFT.利用(2.1.13)式,由 $\hat{s}_k^{2^N}$ 得到 $\hat{c}_k^{2^N}$,并取 $\hat{c}_k^{2^N}$ 的逆 FFT,再由第一步重构 f.

最简单的情况是对连续函数 $F(\theta)$以 2^N 个等角格式采样,即

得采样点

$$y_j := F(2\pi j/2^N), \quad 0 \leqslant j \leqslant 2^N - 1.$$

我们可以用两种方法将 F 投影到 V_{2^N}.

第一种是用 PBF 去插值. 这要求解 2^N 个方程.

$$y_j = \sum_{l=0}^{2^N-1} c_l^{2^N} P(2\pi(j - l/2^N)), \quad 0 \leqslant j \leqslant 2^N - 1. \tag{2.8.1}$$

因为 P 是 PBF,所以插值矩阵 $A_{j,l} = P(j - l/2^N)$是严格正的(看[60])且可逆. 求解的最快的方法不是求矩阵逆,而是类似于[61]用 FFT 方法. (2.8.1)式的右边是一个离散卷积,两边取 FFT 有

$$\hat{y}_k = \hat{c}_k^{2^N} \widetilde{F}_d[\{P(2\pi l/2^N)\}_{l=0}^{2^N-1}]_k. \tag{2.8.2}$$

我们可以解得 $\hat{c}_k^{2^N}$. 再用逆 FFT 得到系数. 用第一步中的 f 作为 F 的插值. 为得到小波的分解,我们可以从第二步出发然后类似处理.

第二种方法是计算 F 到 V_{2^N}的 L^2 投影. 用此方法,必须满足两个条件:一是尺度函数和小波在 2^N 水平必须有好的局部性,二是函数 F 不能振荡太快. 当这些条件满足时,我们有

$$\begin{aligned} s_l^{2^N} &= \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\phi_{2^N}(\theta - 2\pi l/2^N\})\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta + 2\pi l/2^N)\phi_{2^N}(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\approx F(2\pi l/2^N)\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{2^N}(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\approx \frac{2\pi y_l p_0}{\sqrt{2^N \nu_0^{2^N}}}. \end{aligned} \tag{2.8.3}$$

我们也可以处理扩散数据. 有两种可行的方法. 一是用 PBF 构造扩散数据的插值 F_{int}(见[60]). 另一方法是用离散最小二乘法求出第一步中的 f 的系数.

第三章　周期基插值小波

在这一章里,我们将构造一类具有下列性质的周期小波:插值性,对称性,任意阶的光滑性,实值性,精确的解析表达式,双正交和局部性. 主要相关文献为:[23],[24],[25],[62].

§3.1　周期基插值小波的构造

3.1.1　基插值尺度函数序列的构造

假设 j 是一个大于或等于 0 的整数,K 是一个正整数,$K_j = 2^j K$, $h_j = \frac{2\pi}{K_j}$. 让 $g(x)$是一个 2π-周期连续可微函数且其 Fourier 系数为正,即

$$g(x) = \sum_{n\in Z} d_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \tag{3.1.1}$$

其中 $d_n > 0 (n \in Z)$.

定义

$$V_j := \operatorname{span}\{g(x), g(x-h_j), \cdots, g(x-(K_j-1)h_j)\}. \tag{3.1.2}$$

我们知道 $\dim V_j = K_j$ 和 $V_j \subset V_{j+1}$.

定义 3.1.1.1　对 $l = 0, \cdots, K_j - 1$,定义

$$Z_l^j(x) := \sum_{k=0}^{K_j-1} g(x+kh_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}klh_j} = K_j \sum_{n\in Z} d_{nK_j - l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(nK_j - l)x},$$

$$\widetilde{Z}_l^j(x) := \frac{Z_l^j(x)}{\| Z_l^j \|}.$$

我们容易验证

$$\langle \widetilde{Z}^j_{l_1}, \widetilde{Z}^j_{l_2} \rangle = \delta_{l_1, l_2},$$

其中 $0 \leqslant l_1, l_2 \leqslant K_j - 1$，且

$$Z^j_l(x + kh_j) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}lkh_j} Z^j_l(x). \tag{3.1.3}$$

因为 $Z^j_l(0) = K_j \sum_{n \in Z} d_{nK_j - l} > 0$，所以我们有下列定义：

定义 3.1.1.2 对 $j \geqslant 0, j \in Z$，置

$$\phi_j(x) = \frac{1}{K_j} \sum_{l=0}^{K_j-1} \frac{Z^j_l(x)}{Z^j_l(0)}.$$

那么我们有结论：

定理 3.1.1.1 假设 $g(x)$ 满足(3.1.1)式. 令 V_j, ϕ_j 分别与(3.1.2) 式和定义 3.1.1.2 中的一样，那么：

1. $\phi_j(x)$ 有基插值性质，即 $\phi_j(kh_j) = \delta_{0,k} \quad (k = 0, 1, \cdots, K_j - 1)$；

2. $\{\phi_j(\cdot - kh_j)\}_{k=0}^{K_j-1}$ 是 V_j 的一个基，即

$$V_j = \mathrm{span}\{\phi_j(\cdot - kh_j) \quad | \quad k = 0, 1, \cdots, K_j - 1\};$$

3. $\phi_j(x)$ 满足下列尺度方程：

$$\phi_j(x) = \phi_{j+1}(x) + \sum_{l=0}^{K_j-1} \phi_j((2l+1)h_{j+1}) \phi_{j+1}(x - (2l+1)h_{j+1}).$$

证明 从(3.1.3)式，

$$\phi_j(kh_j) = \frac{1}{K_j} \sum_{l=0}^{K_j-1} \frac{Z^j_l(kh_j)}{Z^j_l(0)} = \frac{1}{K_j} \sum_{l=0}^{K_j-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}lkh_j} = \delta_{0,k}.$$

因为 $\phi_j(\cdot - kh_j) \in V_j$，$\mathrm{span}\{\phi_j(\cdot), \phi_j(\cdot - h_j), \cdots, \phi_j(\cdot - (K_j - 1)h_j)\} \subset V_j$ 和函数族 $\{\phi_j(\cdot - kh_j)\}_{k=0}^{K_j-1}$ 是一个线性无关系，所以 $V_j = \mathrm{span}\{\phi_j(\cdot - kh_j) \mid k = 0, 1, \cdots, K_j - 1\}$. 尺度方程立即可从 $\phi_j(x)$ 的基插值得到. 证毕.

$\phi_j(x)$ 称为周期基插值尺度函数(简称 PCIF).

3.1.2 基插值小波的构造

在这一节里，我们将构造基插值小波. 对 $l = 0, \cdots, K_j - 1$，定

义

$$R_l^j(x) := \{c_l^{j+1}\widetilde{Z}_l^{j+1}(x) - c_{K_j+l}^{j+1}\widetilde{Z}_{K_j+l}^{j+1}(x)\}e^{ilh_{j+1}}, \tag{3.1.4}$$

其中 $c_l^{j+1} = \dfrac{\| Z_{K_j+l}^{j+1} \|}{\| Z_l^j \|}$.

引理 3.1.2.1 对 $l, \lambda = 0, \cdots, K_j - 1$,

$$\langle R_l^j(x), Z_\lambda^j(x)\rangle = 0.$$

证明 由 Z_λ^j 的定义,我们有

$$Z_\lambda^j(x) = \frac{1}{2}(Z_\lambda^{j+1}(x) + Z_{K_j+\lambda}^{j+1}(x)). \tag{3.1.5}$$

因此从(3.1.4)式,(3.1.5)式和 Z_λ^{j+1} 的正交性,

$$\langle R_l^j(x), Z_\lambda^j(x)\rangle = \frac{1}{2}e^{ilh_{j+1}}\{c_l^{j+1}\cdot \| Z_\lambda^{j+1} \| - c_{K_j+l}^{j+1}\cdot \| Z_{K_j+l}^{j+1} \|\}\cdot \delta_{\lambda,l} = 0.$$

证毕.

因为

$$R_l^j(h_{j+1}) = c_l^{j+1}\widetilde{Z}_l^{j+1}(0) + c_{K_j+l}^{j+1}\widetilde{Z}_{K_j+l}^{j+1}(0) > 0,$$

所以,我们可以定义

$$L_j(x) := \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{R_l^j(x)}{R_l^j(h_{j+1})}. \tag{3.1.6}$$

注意到

$$R_l^j(kh_j + h_{j+1}) = e^{-ilkh_j}R_l^j(h_{j+1}),$$

因此我们有

$$L_j(kh_j + h_{j+1}) = \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{R_l^j(kh_j + h_{j+1})}{R_l^j(h_{j+1})} = \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}e^{-iklh_j} = \delta_{0,k}.$$

定义 3.1.2.1

$$W_j := \mathrm{span}\{R_l^j(x) \mid l = 0, \cdots, K_j - 1\}.$$

那么由引理 3.1.2.1,我们知道

$$W_j \subset V_{j+1} \ominus V_j.$$

再注意到对每个 j, $L_j(x-kh_j)$是$\{R_l^j(x)\}_{l=0}^{K_j-1}$的线性组合，所以

$$\text{span}\{L_j(x-kh_j):k=0,\cdots,K_j-1\}\subset W_j\subset V_{j+1}\ominus V_j.$$

但

$$\begin{aligned}&\dim(\text{span}\{L_j(x-kh_j):k=0,\cdots,K_j-1\})\\&=K_j=\dim(V_{j+1}\ominus V_j),\end{aligned}$$

因而

$$W_j=V_{j+1}\ominus V_j=\text{span}\{L_j(x-kh_j)\mid k=0,\cdots,K_j-1\}.$$

这样，综合上述讨论我们得到

定理 3.1.2.1 让 ϕ_j 和 L_j 分别是定义 3.1.1.2 和(3.1.6)式中的函数. 那么我们有

1. $\{L_j(x-lh_j)\}_{l=0}^{K_j-1}$是 W_j 的一个基；
2. $L_j(kh_j+h_{j+1})=\delta_{0,k}$, $(k=0,\cdots,K_j-1)$;
3. $L_j(x)$满足下列双尺度方程：

$$L_j(x)=\phi_{j+1}(x-h_{j+1})+\sum_{l=0}^{K_j-1}L_j(lh_j)\phi_{j+1}(x-lh_j).$$

$L_j(x)$称为周期基插值小波(简称 PCIW).

因为 $\phi_j(x)$, $L_j(x)$是 $g(x)$和它的平移的线性组合，所以 $\phi_j(x)$和 $L_j(x)$的光滑性是与 $g(x)$相同的. 因此我们可以构造任意阶光滑的周期基插值小波.

3.1.3 尺度函数和小波的对称性

在这一节里，我们假设 $g(x)$是实值的且关于原点对称，即

$$g(x)=g(-x)=\overline{g(x)},$$

这蕴含着对 $n\in Z$,

$$d_n=d_{-n}=\overline{d_n}.$$

我们容易证明下列结论：

引理 3.1.3.1 假设 Z_l^j, c_l^{j+1} 分别是定义 3.1.1.1 和(3.1.4)式中的函数. 那么下列等式成立：

$$\overline{Z_l^j(x)} = Z_{-l}^j(x) = Z_{K_j-l}^j(x) = Z_l^j(-x),$$

$$c_l^{j+1} = c_{-l}^{j+1} = c_{K_{j+1}-l}^{j+1}.$$

现在我们给出这一节的主要结果.

定理 3.1.3.1 假设 $\phi_j(x)$, $L_j(x)$ 分别是定义 3.1.1.2 和 (3.1.6)式中的函数,且 $g(x)$ 为实函数, $d_n = d_{-n}$. 那么

1. $\phi_j(x)$ 是实函数且 $\phi_j(-x) = \phi_j(x)$;

2. $L_j(x)$ 是实函数且 $L_j(h_{j+1}+x) = L_j(h_{j+1}-x)$.

证明 1. 由引理 3.1.3.1 和 $Z_{K_j}^j(x) = Z_0^j(x)$ 知,

$$\overline{\phi_j(x)} = \phi_j(x).$$

因此

$$\phi_j(-x) = \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{\overline{Z_l^j(-x)}}{\overline{Z_l^j(0)}} = \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{\overline{Z_{-l}^j(x)}}{\overline{Z_{-l}^j(0)}} = \phi_j(x).$$

2. 注意到

$$\begin{aligned}\overline{R_l^j(x)} &= \{c_l^{j+1}\overline{\widetilde{Z}_l^{j+1}(x)} - c_{K_j+l}^{j+1}\overline{\widetilde{Z}_{K_j+l}^{j+1}(x)}\}e^{-ilh_{j+1}}\\ &= \{c_{-l}^{j+1}\widetilde{Z}_{-l}^{j+1}(x) - c_{K_j-l}^{j+1}\widetilde{Z}_{K_j-l}^{j+1}(x)\}e^{-ilh_{j+1}}\\ &= R_{-l}^j(x) = R_{K_j-l}^j(x).\end{aligned}$$

因此,由 $R_{K_j}^j(x) = R_0^j(x)$ 知,

$$\begin{aligned}\overline{L_j(x)} &= \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{R_{K_j-l}^j(x)}{R_{K_j-l}^j(h_{j+1})}\\ &= \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{R_l^j(x)}{R_l^j(h_{j+1})} = L_j(x).\end{aligned}$$

从 $R_{-l}^j(h_{j+1}-x) = R_l^j(h_{j+1}+x)$,我们得到

$$\begin{aligned}L_j(h_{j+1}-x) &= \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{R_l^j(h_{j+1}-x)}{R_l^j(h_{j+1})}\\ &= \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{R_{-l}^j(h_{j+1}+x)}{R_{-l}^j(h_{j+1})}\end{aligned}$$

$$= \overline{L_j(h_{j+1} + x)}$$
$$= L_j(h_{j+1} + x),$$

这表明 $L_j(x)$关于点 h_{j+1}是对称的. 证毕.

3.1.4 对偶尺度函数和对偶小波

在这一节里,我们将利用循环矩阵和它的性质来构造对偶尺度函数和对偶小波. 首先,我们有下列引理:

引理 3.1.4.1 假设 $\phi_j(x)$ 是定义 3.1.1.2 中的函数,

$$\omega := e^{\frac{2\pi i}{K_j}} = e^{ih_j}, F := \frac{1}{\sqrt{K_j}}(\omega^{lk})_{l,k=0}^{K_j-1},$$
$$G_j := (\langle \phi_j(\cdot - lh_j), \phi_j(\cdot - kh_j)\rangle)_{l,k=0}^{K_j-1},$$
$$P_j(z) := \sum_{k=0}^{K_j-1} \langle \phi_j(\cdot), \phi_j(\cdot - kh_j)\rangle z^k.$$

那么 G_j 是一个可逆循环矩阵且

$$G_j^{-1} = F\Lambda_j^{-1}F^*,$$

其中 $\Lambda_j = \mathrm{diag}\{P_j(1), P_j(\omega), \cdots, P_j(\omega^{K_j-1})\}$.

证明 由 $\phi_j(x)$的周期性,我们知道

$$\langle \phi_j(x - lh_j), \phi_j(x - kh_j)\rangle$$
$$= \langle \phi_j(x), \phi_j(x - (k - l)h_j)\rangle,$$

这表明 G_j 是一个循环矩阵.

从文献[54],我们知道 G_j 可由矩阵 F 对角化,即

$$G_j = F\Lambda_j F^*,$$

其中 $\Lambda_j = \mathrm{diag}\{P_j(1), P_j(\omega), \cdots, P_j(\omega^{K_j-1})\}$. 现在我们需要验证 $P_j(\omega^r) \neq 0 (r = 0, \cdots, K_j - 1)$.

事实上,由定义 3.1.1.2 和 Z_l^j 的标准正交性,我们有

$$\langle \phi_j(x), \phi_j(x - kh_j)\rangle = \frac{1}{K_j^2}\sum_{l=0}^{K_j-1} \frac{\| Z_l^j \|^2}{| Z_l^j(0) |^2} e^{-iklh_j}.$$

对 $r = 0, \cdots, K_j - 1$,

$$P_j(\omega^r)=\frac{1}{K_j^2}\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{\| Z_l^j\|^2}{|Z_l^j(0)|^2}\sum_{k=0}^{K_j-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(r-l)kh_j}$$
$$=\frac{1}{K_j}\frac{\| Z_r^j\|^2}{|Z_r^j(0)|^2}>0.$$

因此，G_j 是一个可逆循环矩阵且 $G_j^{-1}=F\Lambda_j^{-1}F^*$. 证毕.

定理 3.1.4.1 假设 Λ_j 和 F 是引理 3.1.4.1 中的 $\Lambda_j, F, e=(1,0,\cdots,0)\in R^{K_j}$ 是 K_j 维单位向量，且

$$\tilde{\phi}_j(x):=eF\Lambda_j^{-1}F^*\begin{pmatrix}\phi_j(x)\\ \phi_j(x-h_j)\\ \vdots\\ \phi_j(x-(K_j-1)h_j)\end{pmatrix}(\in V_j).$$

那么，$\{\tilde{\phi}_j(x-kh_j)\}_{k=0}^{K_j-1}$ 是 $\{\phi_j(x-kh_j)\}_{k=0}^{K_j-1}$ 的对偶基，即

$$\langle\tilde{\phi}_j(x-kh_j),\phi_j(x-l\,h_j)\rangle=\delta_{k,l},$$

其中 $k,l=0,\cdots,K_j-1$.

证明 让

$$\Pi:=\mathrm{Circ}(0,1,0,\cdots,0)=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

注意到 $F\Lambda_j^{-1}F^*$ 是一个循环矩阵且 $F\Lambda_j^{-1}F^*\Pi=\Pi F\Lambda_j^{-1}F^*$，所以

$$\tilde{\phi}_j(x-kh_j)=e\Pi^kF\Lambda_j^{-1}F^*\cdot(\phi_j(x),\phi_j(x-h_j),\cdots,\phi_j(x-(K_j-1)h_j))^{\mathrm{T}}.$$

这样，

$$\langle\tilde{\phi}_j(x-kh_j),\phi_j(x-lh_j)\rangle$$
$$=e\Pi^kF\Lambda_j^{-1}F^*\begin{pmatrix}\langle\phi_j(x),\phi_j(x-lh_j)\rangle\\ \langle\phi_j(x-h_j),\phi_j(x-lh_j)\rangle\\ \vdots\\ \langle\phi_j(x-(K_j-1)h_j),\phi_j(x-lh_j)\rangle\end{pmatrix},$$

或等价地

$$(\langle \widetilde{\phi}_j(x-kh_j), \phi_j(x-lh_j)\rangle)_{k,l=0}^{K_j-1}$$
$$= I \cdot F\Lambda_j^{-1}F^* \cdot G_j = I.$$

因此我们已经证明了$\{\widetilde{\phi}_j(x-kh_j)\}_{k=0}^{K_j-1}$是$\{\phi_j(x-kh_j)\}_{k=0}^{K_j-1}$的对偶基. 证毕.

类似地,我们有

定理 3.1.4.2 让

$$\Gamma_j(z) = \sum_{k=0}^{K_j-1}\langle L_j(\cdot), L_j(\cdot - kh_j)\rangle z^k,$$

$$\widetilde{L}_j(x) = e \cdot F \cdot \mathrm{diag}\{(\Gamma_j(1))^{-1}, (\Gamma_j(\omega))^{-1}, \cdots, (\Gamma_j(\omega^{K_j-1}))^{-1}\} F^* \times \begin{pmatrix} L_j(x) \\ L_j(x-h_j) \\ \vdots \\ L_j(x-(K_j-1)h_j) \end{pmatrix}.$$

那么

$$\langle \widetilde{L}_j(x-kh_j), L_j(x-l\,h_j)\rangle = \delta_{k,l}$$

其中 $k, l = 0, 1, \cdots, K_j - 1$.

因为 $\Gamma_j(\omega^r) = K_j \dfrac{(c_r^{j+1})^2 + (c_{K_j+r}^{j+1})^2}{|R_r^j(h_{j+1})|^2} > 0$,所以定理 3.1.4.2 的证明与定理 3.1.4.1 的证明类似.

对称也是小波应具有的性质之一. 由于 ϕ_j 和 L_j 是对称的,所以我们有

定理 3.1.4.3 假设 $g(x)$是关于原点对称. 那么 $\widetilde{\phi}_j(x)$和 $\widetilde{L}_j(x)$也是关于原点对称.

证明 为方便,我们重写 $\widetilde{\phi}_j(x)$ 如下:

$$\widetilde{\phi}_j(x) = \sum_{k=0}^{K_j-1} c_k \phi_j(x-kh_j).$$

那么由 ϕ_j 的周期和对称性，我们有

$$\widetilde{\phi}_j(-x) = c_0\phi_j(x) + \sum_{k=1}^{K_j-1} c_k\phi_j(x + kh_j)$$

$$= c_0\phi_j(x) + \sum_{k=1}^{K_j-1} c_{K_j-k}\phi_j(x - kh_j).$$

因为

$$\mathrm{Circ}(c_0, \cdots, c_{K_j-1}) = F\Lambda_j^{-1}F^*,$$

$$\Lambda_j = \mathrm{diag}\{P_j(1), P_j(\omega), \cdots, P_j(\omega^{K_j-1})\}$$

是实值的，所以 $\mathrm{Circ}(c_0, \cdots, c_{K_j-1})$是一个实 Hermite 矩阵，并且 $c_{K_j-k} = c_k$.

这样，

$$\widetilde{\phi}_j(-x) = \sum_{k=0}^{K_j-1} c_k\phi_j(x - kh_j) = \widetilde{\phi}_j(x)$$

同样的讨论可得到 $\widetilde{L}_j(x) = \widetilde{L}_j(-x)$. 证毕.

显然，$\widetilde{\phi}_j$ 和 $\widetilde{L}_j$ 有 g 相同的光滑性.

3.1.5 算法

在这一节里，我们将给出前面构造的周期小波的分解和重构算法. 设 $f(x) \in V_{j+1}$. 那么我们重写 $f(x)$为设

$$f(x) = \sum_{k=0}^{K_{j+1}-1} f(kh_{j+1})\phi_{j+1}(x - kh_{j+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{K_{j+1}-1} t_k^{j+1}\phi_{j+1}(x - kh_{j+1}).$$

写着

$$\phi_{j+1}(x) = \sum_{l=0}^{K_j-1}\{a_l^j\phi_j(x - lh_j) + b_l^jL_j(x - lh_j)\}, \quad (3.1.7)$$

$$\phi_{j+1}(x - h_{j+1}) = \sum_{l=0}^{K_j-1}\{p_l^j\phi_j(x - lh_j) + q_l^jL_j(x - lh_j)\}.$$

(3.1.8)

那么

$$\phi_{j+1}(x-2kh_{j+1})=\sum_{l=0}^{K_j-1}\{a_{l-k}^j\phi_j(x-lh_j)+b_{l-k}^jL_j(x-lh_j)\},$$

$$\phi_{j+1}(x-(2k+1)h_{j+1})$$
$$=\sum_{l=0}^{K_j-1}\{p_{l-k}^j\phi_j(x-lh_j)+q_{l-k}^jL_j(x-lh_j)\}.$$

因此

$$f(x)=\sum_{k=0}^{K_j-1}t_{2k}^{j+1}\sum_{l=0}^{K_j-1}\{a_{l-k}^j\phi_j(x-lh_j)+b_{l-k}^jL_j(x-lh_j)\}$$
$$+\sum_{k=0}^{K_j-1}t_{2k+1}^{j+1}\sum_{l=0}^{K_j-1}\{p_{l-k}^j\phi_j(x-lh_j)+q_{l-k}^jL_j(x-lh_j)\}$$
$$=\sum_{l=0}^{K_j-1}\left\{\sum_{k=0}^{K_j-1}[a_{l-k}^jt_{2k}^{j+1}+p_{l-k}^jt_{2k+1}^{j+1}]\right\}\phi_j(x-lh_j)$$
$$+\sum_{l=0}^{K_j-1}\left\{\sum_{k=0}^{K_j-1}[b_{l-k}^jt_{2k}^{j+1}+q_{l-k}^jt_{2k+1}^{j+1}]\right\}L_j(x-lh_j).$$

这得到下列分解公式:

$$t_l^j=\sum_{k=0}^{K_j-1}[a_{l-k}^jt_{2k}^{j+1}+p_{l-k}^jt_{2k+1}^{j+1}],$$

$$s_l^j=\sum_{k=0}^{K_j-1}[b_{l-k}^jt_{2k}^{j+1}+q_{l-k}^jt_{2k+1}^{j+1}].$$

因为

$$\phi_j(x)=\sum_{l=0}^{K_{j+1}-1}\phi_j(lh_{j+1})\phi_{j+1}(x-lh_{j+1}),$$

$$L_j(x)=\sum_{l=0}^{K_{j+1}-1}L_j(lh_{j+1})\phi_{j+1}(x-lh_{j+1}),$$

所以简单的计算给出

$$\sum_{k=0}^{K_j-1}t_k^j\phi_j(x-kh_j)+\sum_{k=0}^{K_j-1}s_k^jL_j(x-kh_j)$$

$$= \sum_{l=0}^{K_{j+1}} \left\{ \sum_{k=0}^{K_j-1} t_k^j \phi_j((l-2k)h_{j+1}) \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{K_j-1} s_k^j L_j((l-2k)h_{j+1}) \right\} \phi_{j+1}(x - lh_{j+1}).$$

因此我们有重构公式:

$$t_l^{j+1} = \sum_{k=0}^{K_j-1} \{ t_k^j \varphi_j((l-2k)h_{j+1}) + s_k^j L_j((l-2k)h_{j+1}) \},$$

或者

$$t_{2l}^{j+1} = t_l^j + \sum_{k=0}^{K_j-1} s_k^j L_j((l-k)h_j),$$

$$t_{2l+1}^{j+1} = \sum_{k=0}^{K_j-1} t_k^j \phi_j((l-k)h_j + h_{j+1}) + s_l^j.$$

余下我们需要计算系数 a_l^j, b_l^j, p_l^j 和 q_l^j. 从

$$\phi_{j+1}(x) = \sum_{l=0}^{K_j-1} \{ a_l^j \phi_j(x - lh_j) + b_l^j L_j(x - lh_j) \}$$

和 $\phi_j(x)$ 与 $\tilde{\phi}_j(x)$ 为对偶知,

$$a_l^j = \langle \tilde{\phi}_j(x - lh_j), \phi_{j+1}(x) \rangle.$$

回忆到

$$\tilde{\phi}_j(x) = \sum_{k=0}^{K_{j+1}-1} \tilde{\phi}_j(kh_{j+1}) \phi_{j+1}(x - kh_{j+1}) \in V_{j+1},$$

所以

$$a_l^j = \sum_{k=0}^{K_{j+1}-1} \tilde{\phi}_j(kh_{j+1}) \langle \phi_{j+1}(x - kh_{j+1} - lh_j), \phi_{j+1}(x) \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{K_{j+1}-1} \tilde{\phi}_j((k-2l)h_{j+1}) \langle \phi_{j+1}(x - kh_{j+1}), \phi_{j+1}(x) \rangle.$$

同样地,我们有

$$b_l^j = \sum_{k=0}^{K_{j+1}-1} \tilde{L}_j((k-2l)h_{j+1}) \langle \phi_{j+1}(x - kh_{j+1}), \phi_{j+1}(x) \rangle,$$

$$p_l^j = \sum_{k=0}^{K_{j+1}-1} \widetilde{\phi}_j((k-2l+1)h_{j+1})\langle \phi_{j+1}(x-kh_{j+1}), \phi_{j+1}(x)\rangle,$$

$$q_l^j = \sum_{k=0}^{K_{j+1}-1} \widetilde{L}_j((k-2l+1)h_{j+1})\langle \phi_{j+1}(x-kh_{j+1}), \phi_{j+1}(x)\rangle.$$

§3.2 PCIF 的局部性质

在这一节中,我们将用两种不同的方法调查前面构造的周期基插值尺度函数的局部性质.第一个方法是样条方法,它表明某类插值函数在一个周期内是指数衰减的.为简单起见,我们仅对 Bernoulli 样条使用这种方法.实际上,样条方法可以对较广一类函数使用(见文献[55]).第二种方法是由 F. J. Narcowich 和 J. D. Ward 在文献[11]中介绍的角频局部化方法.

3.2.1 周期基插值样条

定义 3.2.1.1 让 $M_1(x)$是集合$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$的特征函数且 $M_m(x)$是 $M_1(x)$自己卷积自己 m 次.

容易看到

$M_m(x)\in S_m:=\{s(x)\mid s(x)\in C^{m-2}$,如果 m 是偶,$s(x)$在整数点 ν 有简单结点,或者如果 m 是奇,$s(x)$在半整数点 $\nu+\frac{1}{2}$ 有简单结点,且 $s(x)$限制在任何两个结点的区间上为次数不超过 $m-1$ 的多项式.

置

$$S_m(h_j):=\left\{g(x)\mid g(x)=s\left(\frac{K_j}{T}x\right), s(\cdot)\in S_m\right\},$$

其中 $K_j=2^jK, h_jK_j=T, T>0, h_0:=h=\frac{T}{K}$.

注记 3.2.1.1

(i) 当 $g(x)\in S_m(h_j)$时,那么如果 m 是偶的,则 $g(x)$是一

个次数为 $m-1$ 具有结点$\{lh_j \mid l\in Z\}$的样条；如果 m 是奇的，则 $g(x)$是一个次数为 $m-1$ 具有结点$\{(l+\frac{1}{2})h_j \mid l\in Z\}$的样条.

(ii) 如果 $j=0$，那么 $S_m(h_j)=S_m$.

定义 3.2.1.2

$$\mathring{S}_m(j,T) = \{g \mid g(\cdot) \in S_m(h_j), g(\cdot) \text{ 是 } T \text{ 周期的}\}. \tag{3.2.1}$$

让 $y=\{y_\nu\}$是一个给定的数列，足标 ν 跑遍 Z. 在给定的函数空间 S 上找到一个函数$F(x)(x\in R)$满足关系

$$F(\nu) = y_\nu \tag{3.2.2}$$

$(\nu\in Z)$的问题称为一个基插值问题，我们用符号 CIP(y,S)来表示.

让 $s\geqslant 0$，我们考虑函数类

$$F_s = \{F(x) \mid F(x) \in C, F(x) = O(|x|^s) \quad (x\to\pm\infty)\}.$$

特别，F_0是连续有界函数类. 我们也考虑函数类 $F^* = \bigcup_{s\geqslant 0} F_s$.

下列引理表明了插值条件 (3.2.2)式在两个类

$$S_m \cap F^* \quad \text{和} \quad Y^*$$

之间建立了一对一关系，其中 $Y^*=\bigcup_{s\geqslant 0} Y_s$ 且

$$Y_s = \{y = \{y_\nu\} \mid y_\nu = O(|\nu|^s), \nu\to\pm\infty\}. \tag{3.2.3}$$

引理 3.2.1.1 (见文献[56]) 插值问题

$$\text{CIP}(g, S_m \cap F_s) \tag{3.2.4}$$

有解当且仅当 $y\in Y_s$，并且如果(3.2.4)有解，那么解惟一.

推论 3.2.1.1 给定单位序列 $\delta=\{\delta_\nu\}$，其中若 $\nu=0, \delta_\nu=1$；若 $\nu\neq 0, \delta_\nu=0$. 那么 CIP$(\delta, S_m\cap F_0)$有惟一解，我们用 $F_m(x)$来表示. 因此

$$F_m(\nu) = \delta_\nu, \quad \text{所有 } \nu \in Z.$$

引理 3.2.1.2 函数 $F_m(x)$满足下列不等式：

$$|F_m(x)| < C_m e^{(-r_m|x|)}, \quad \text{所有 } x \in R. \tag{3.2.5}$$

注记 3.2.1.2 引理 3.2.1.2 的结果对 L 样条可以在文献[57,pp179]中发现.

定义

$$\gamma_{l,j}(x)=\sum_{\nu\in Z}F_m(h_j^{-1}x-l-\nu K_j). \qquad (3.2.6)$$

我们有下列结果:

定理 3.2.1.1 对 $l,0\leqslant l\leqslant K_j-1$,函数 $\gamma_{l,j}(x)$具有如下性质:

(i) $\gamma_{l,j}(\lambda h_j)=\delta_{l,\lambda},0\leqslant l,\lambda\leqslant K_j-1$;

(ii) $\Gamma=\{\gamma_{l,j}\}_{l=0}^{K_j-1}$是 $\mathring{S}_m(j,T)$的一个基;

(iii) $\gamma_{K_{j-1},j}(x)$是偶的且关于点 $M:=\frac{T}{2}$对称;

(iv) 存在常数 C_1 和 C_2 使得

$$|\gamma_{K_{j-1},j}(x)|\leqslant C_1e^{-2^jC_2|x-M|},\quad \forall x\in[0,T].$$

证明 (i)

$$\gamma_{l,j}(\lambda h_j)=\sum_{\nu\in Z}F_m(h_j^{-1}h_j\lambda-l-\nu K_j)$$

$$=\sum_{\nu\in Z}\delta_{\lambda-l,\nu K_j}=\delta_{\lambda-l,0}=\delta_{\lambda,l}.$$

(ii) 因为 $F_m(x)\in S_m$,所以从 S_m 的定义知,$F_m(x-\nu)\in S_m$(ν 是任意的),从而

$$F_m(h_j^{-1}x-l-\nu K_j)\in S_m(h_j)$$

和

$$\gamma_{l,j}(x)=\sum_{\nu\in Z}F_m(h_j^{-1}x-l-\nu K_j)\in\mathring{S}_m(j,T).$$

如果存在常数$\{C_l\}$使得

$$\sum_{l=0}^{K_j-1}C_l\gamma_{l,j}(x)=0,\quad \forall x\in[0,T],$$

那么

$$\sum_{l=0}^{K_j-1}C_l\gamma_{l,j}(\lambda h_j)=C_\lambda=0,\quad \lambda=0,1,\cdots,K_j-1.$$

因此，$\{\gamma_{l,j}(\cdot)\}_{l=0}^{K_j-1}$是一个线性无关类. 故 Γ 是 $\mathring{S}_m(j,T)$的一个基.

(iii) 从 $\gamma_{K_{j-1},j}(x)$的定义，我们得到

$$\gamma_{K_{j-1},j}(-x) = \sum_{\nu\in Z} F_m(-h_j^{-1}x - K_{j-1} - \nu K_j)$$
$$= \sum_{\nu\in Z} F_m(h_j^{-1}x + K_{j-1} + \nu K_j).$$

这是因为 $F_m(x)$是偶的([56,pp414,(3,4)]). 令 $\nu = -\lambda - 1$，则我们有

$$\gamma_{K_{j-1},j}(-x) = \sum_{\lambda\in Z} F_m(h_j^{-1}x + K_{j-1} - (\lambda+1)K_j)$$
$$= \sum_{\lambda\in Z} F_m(h_j^{-1}x - K_{j-1} - \lambda K_j) = \gamma_{K_{j-1},j}(x).$$

所以 $\gamma_{K_{j-1},j}(x)$是偶的. 因为

$$\gamma_{K_{j-1},j}(M-a) = \sum_{\nu\in Z} F_m(h_j^{-1}(M-a) - K_{j-1} - \nu K_j)$$
$$= \sum_{\nu\in Z} F_m(h_j^{-1}(a-M) + K_{j-1} + \nu K_j)$$
$$= \sum_{\nu\in Z} F_m(h_j^{-1}(a+M) - 2Mh_j^{-1} + K_{j-1} + \nu K_j),$$

因此 $\gamma_{K_{j-1},j}(M-a) = \gamma_{K_{j-1},j}(M+a)$，即 $\gamma_{K_{j-1},j}(x)$关于点 M 对称.

(iv) 从(iii)知，我们仅需要考虑 $x\in[M,T]$的情况. 由引理3.2.1.2知，

$$|\gamma_{K_{j-1},j}(x)| = |\sum_{\nu\in Z} F_m(h_j^{-1}x - K_{j-1} - \nu K - j)|$$
$$\leqslant \sum_{\nu\in Z} C_m e^{\left\{-2^j\frac{K}{T}r_m|x-K_{j-1}h_j-\nu T|\right\}}$$
$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

下面分别处理这三项.

$$I_1 = \sum_{\nu\geqslant 1} C_m e^{\left\{-2^j\frac{K}{T}r_m(\nu T-(x-M))\right\}}$$

$$\leqslant \sum_{\nu \geqslant 1} C_m e^{\left\{-2^j \frac{K}{T} r_m ((\nu-1)T+(x-M))\right\}}$$

$$= C_m e^{\left\{-2^j \frac{K}{T} r_m (x-M)\right\}} e^{(2^j K)} / [e^{(2^j K)} - 1]$$

$$= C_j^1 C_m e^{\left\{-2^j \frac{K}{T} r_m (x-M)\right\}}$$

$$= C_j^1 \xi,$$

其中 $C_m e^{\left\{-2^j \frac{K}{T} r_m (x-M)\right\}}$，$C_j^1 = e^{(2^j K)} / [e^{(2^j K)} - 1]$对 $j \geqslant 0$ 是有界的.对 I_2 和 I_3,我们有

$$I_2 = C_m e^{\left\{-2^j \frac{K}{T} r_m |x-K_{j-1} h_j|\right\}} = \xi,$$

$$I_3 = \sum_{\nu \leqslant -1} C_m e^{\left\{-2^j \frac{K}{T} r_m (|\nu| T+(x-M))\right\}} = I_1.$$

所以

$$I_1 + I_2 + I_3 = (2C_j^1 + 1) C_m e^{\left\{-2^j \frac{K}{T} r_m (x-M)\right\}}$$
$$\leqslant C_1 e^{(-2^j C_2 |x-M|)},$$

这里 C_1, C_2是常数.证毕.

注记 3.2.1.3 从(iv),我们知道当 $j \to \infty$时,$\gamma_{K_{j-1},j}(x)$衰减很快($x \in [0,T]$).

3.2.2 Bernoulli 多项式的表示

现在我们构造 $\mathring{S}_m(j,T)$的另一个基.所谓 Bernoulli 多项式是定义在区间 $I=[0,T]$上,次数为 n 且满足下列条件的多项式:

$$\phi_0(x) = 1, \phi_n'(x) = \phi_{n-1}(x), \int_0^T \phi_n(t) dt = 0, n \geqslant 1. \tag{3.2.7}$$

显然,根据上面规则,我们有

$$\phi_1(x) = x - \frac{T}{2};$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - Tx) + \frac{T^2}{12};$$

$$\phi_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{T}{4}x^2 + \frac{T^2}{12}x;$$

$$\phi_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{T}{12}x^3 + \frac{T^2}{24}x^2 - \frac{T^4}{720}. \qquad (3.2.8)$$

注记 3.2.2.1 置 $T=2\pi$,那么

$$\phi_n^*(x) = -\frac{1}{2}\phi_n(x) \qquad (3.2.9)$$

称为区间$[0,2\pi]$上的 Bernoulli 多项式(看[58]).

以周期 T 周期化ϕ_1,我们得到它的 Fourier 展开:

$$\phi_1(x) = -\frac{T}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{T}x, \qquad (3.2.10)$$

$$\phi_2(x) = \frac{T^2}{2\pi^2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi}{T}x. \qquad (3.2.11)$$

一般形式为

$$\phi_m(x) = -2\left(\frac{T}{2\pi}\right)^m\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^m}\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x - \frac{m\pi}{2}\right), (3.2.12)$$

且 ϕ_m 满足(3.2.7)($m=1,\cdots$).

函数 ϕ_m 在以 2π 为周期的可微函数类中起着很重要的作用.让我们回忆下列表示定理.

定理 3.2.2.1 (见[56])函数 f 属于$\mathring{S}_m(j,T)$当且仅当它可写成下列形式:

$$f(x) = a_0 + \sum_{\nu=0}^{K_j-1}c_\nu\phi_m(x-\nu h_j), \qquad (3.2.13)$$

其中

$$c_0 + \cdots + c_{K_j-1} = 0. \qquad (3.2.14)$$

更多地,

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t,$$

$$c_\nu = \frac{-1}{T}[f^{(m-1)}(\nu h_j+0) - f^{(m-1)}(\nu h_j-0)],$$

$$(3.2.15)$$

其中 $\nu=0,1,\cdots,K_j-1$. 因此表示式 (3.2.13) 是惟一的.

从定理 3.2.2.1,我们得到下列推论:

推论 3.2.2.1

a) 当 m 为偶时,

$$\{1,\phi_m(x-\nu h_j)-\phi_m(x-(K_j-1)h_j),\nu=0,\cdots,K_j-2\}$$

是 $\mathring{S}_m(j,T)$的基.

b) 当 m 为奇时,$\mathring{S}_m(j,T)$的基是

$$\left\{1,\phi_m(x-\nu h_j-\frac{1}{2}h_j)-\phi_m\left(x-(K_j-1)h_j-\frac{1}{2}h_j\right)\right|$$

$$\left.\nu=0,\cdots,K_j-2\right\}.$$

我们重写(3.2.12)式为

$$\phi_m(x)=-\left(\frac{T}{2\pi}\right)^m\left\{\sum_{\nu\neq0}\frac{1}{(i\nu)^m}\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}\frac{2\nu\pi}{T}x\right)}\right\}. \quad (3.2.16)$$

定义

$$B_l^{m,j}(x):=\sum_{\lambda=0}^{K_j-1}\phi_m(x-\lambda h_j)\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}l\lambda h_j\frac{2\pi}{T}\right)}. \quad (3.2.17)$$

我们可证明

$$B_l^{m,j}(rh_j)=\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}lrh_j\frac{2\pi}{T}\right)}B_0^{m,j}, \quad (3.2.18)$$

$$B_l^{m,j}(0)=-\left(\frac{T}{2\pi}\right)^m K_j\sum_{n\neq0}\frac{1}{[i(l+nK_j)]^m},$$

$$0\leqslant l\leqslant K_j-1. \quad (3.2.19)$$

事实上,将(3.2.16)式代入(3.2.17)式且让 $x=rh_j$,则我们可得(3.2.18)式. 同时,从 (3.2.19)式,我们有

$$\text{当 } m \text{ 是偶},B_l^{m,j}(0)\neq0,\quad 0\leqslant l\leqslant K_j-1, \quad (3.2.20)$$

$$\text{当 } m \text{ 是奇},B_l^{m,j}(0)\neq0,\quad 1\leqslant l\leqslant K_j-1.$$

但 $B_0^{m,j}(0)=0$ (m 是奇).

置

$$b_l^{m,j}(x):=B_l^{m,j}(x)/B_l^{m,j}(0), \quad (3.2.21)$$

则这导致 $b_l^{m,j}(0)=1(0<l\leqslant K_j-1)$.

定理 3.2.2.2 假设 T-周期连续函数 $b_l^{m,j}(x)(l=1,\cdots,K_j-1)$为(3.2.21)式中构造的. 那么

$$\rho^{m,j}(x):=\frac{1}{K_j}\Big(1+\sum_{l=1}^{K_j-1}b_l^{m,j}(x)\Big),\quad x\in R \tag{3.2.22}$$

是在 $\mathring{S}_m(j,T)$中满足

$$\rho^{m,j}(\nu h_j)=\delta_{0,\nu},\quad 0\leqslant\nu\leqslant K_j-1 \tag{3.2.23}$$

的惟一周期 Lagrange 函数.

更多地,对 $f\in\mathring{C}_T$,存在惟一函数 $Q_m(f)\in\mathring{S}_m(j,T)$使得在点 νh_j 插值$f(\nu\in Z)$.

证明 为证明(3.2.23)式,在(3.2.22)式中,置 $x=\nu h_j$,那么

$$\rho^{m,j}(\nu h_j)=\frac{1}{K_j}\Big(1+\sum_{l=1}^{K_j-1}b_l^{m,j}(\nu h_j)\Big)=\frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}l\nu\frac{2\pi}{K_j}\right)}=\delta_{\nu,0},$$

这就是(3.2.23)式. 现在我们证明 $\rho^{m,j}$是$\mathring{S}_m(j,T)$中一元. 但是这立即来自 (3.2.22),(3.2.21) 和(3.2.17) 三式,因为

$$\rho^{m,j}(x)=\frac{1}{K_j}\Big\{1+\sum_{\lambda=0}^{K_j-1}d_\lambda\phi_m(x-\lambda h_j)\Big\}, \tag{3.2.24}$$

其中

$$d_\lambda=\frac{1}{K_j}\sum_{l=1}^{K_j-1}\frac{1}{B_l^{m,j}(0)}\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}l\lambda h_j\frac{2\pi}{T}\right)}$$

和

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=0}^{K_j}d_\lambda&=\frac{1}{K_j}\sum_{l=1}^{K_j-1}\frac{1}{B_l^{m,j}(0)}\sum_{\lambda=0}^{K_j-1}\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}l\lambda h_j\frac{2\pi}{T}\right)}\\&=\frac{1}{K_j}\cdot\sum_{l=1}^{K_j-1}\frac{1}{B_l^{m,j}(0)}K_j\delta_{l,0}=0.\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

证毕.

推论 3.2.2.2

$$\rho^{m,j}(x)=\gamma_{0,j}(x), \tag{3.2.26}$$

$$\rho^{m,j}(x-\nu h_j)=\gamma_{\nu,j}(x). \tag{3.2.27}$$

证明 从定理 3.2.1.1,定理 3.2.2.1 和周期 Lagrange 函数的惟一性,我们有(3.2.26)式和(3.2.27)式. 证毕.

注记 3.2.2.2 从定理 3.2.2.1,(3.2.21)式和(3.2.17)式,我们容易构造周期基插值样条函数.

定义 $g(x)$为

$$g(x) := -(\mathrm{i})^m \phi_m(x) \quad (m \text{ 是偶}),$$

其中 $\phi_m(x)$是 (3.2.16)式中的. 那么 g 的 Fourier 系数是正的. 根据§3.1.1 中介绍的结果,空间 $V_j(=\mathring{S}_m(j,T))$可构造. 函数 $\rho^{m,j}(x)$(看(3.2.22)式)正是 V_j 的尺度函数. 从(3.2.27)式和定理 3.2.1.1 的(iv)知,函数 $\rho^{m,j}(x-M)$(固定 $x\in[0,T]$)当 j 趋向无穷时指数衰减.

3.2.3 PICF 的角频局部性

在这一部分中,我们利用第二章所使用过的角频局部化方法来证明第一节构造的 PICF 具有局部性质. 为了方便,我们重新定义范数为 1 的连续周期函数 f 的圆周方差为

$$\mathrm{Var}(f) := 1 - |\tau(f)|, \qquad (3.2.28)$$

其中 $\tau(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$. 这样定义的方差同样可以刻画局部性质.

令

$$f(x) = \sum_{k\in Z} d_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, d_k > 0. \qquad (3.2.29)$$

假设$\{d_k\}_k \in l^1$. 使用这个函数我们可以构造 PCIF(见§3.1). 设 $\phi_j(x)$是定义 3.1.1.2 中定义的函数. 现在我们探讨 PCIF$\phi_j(x)$的局部性质.

显然,ϕ_j 的范数不是 1,所以我们改变 $\tau(f)$的定义为

$$\tau(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} |f(t)|^2 \mathrm{d}t / \|f\|^2. \qquad (3.2.30)$$

置

$$\widetilde{s}_l^j := K_j^{-1} Z_l^j(0) = \sum_{n\in Z} d_{nK_j - l}. \tag{3.2.31}$$

从 $\phi_j(t)$的定义，我们得到

$$\phi_j(t) = \frac{1}{K_j} \sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \frac{Z_l^j(t)}{Z_l^j(0)} \tag{3.2.32}$$

和

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it} \mid \phi_j(t) \mid^2 dt$$

$$= \left(\frac{1}{K_j}\right)^2 \sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \sum_{n\in Z} \frac{d_{nK_j-l}}{\widetilde{s}_l^j} \frac{d_{nK_j-l-1}}{\widetilde{s}_{l+1}^j}. \tag{3.2.33}$$

同样我们得到 $\| \phi_j \|^2$ 如下：

$$K_j^2 \| \phi_j \|^2 = \sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \sum_{n\in Z} \left(\frac{d_{nK_j-l}}{\widetilde{s}_l^j}\right)^2. \tag{3.2.34}$$

从(3.2.33)式 和 (3.2.34)式，我们有

$$\begin{aligned}
&\mid \mathrm{Var}(\phi_j) \mid \\
&= \left| \frac{1}{\| \phi_j \|^2 K_j^2} \sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \sum_{n\in Z} \left\{ \frac{d_{nK_j-l}}{\widetilde{s}_l^j} \frac{d_{nK_j-l-1}}{\widetilde{s}_{l+1}^j} - \left(\frac{d_{nK_j-l}}{\widetilde{s}_l^j}\right)^2 \right\} \right| \\
&\leqslant \frac{1}{\| \phi_j \|^2 K_j} \| \phi_j \| \sqrt{\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \sum_{n\in Z} \left| \frac{d_{nK_j-l-1}}{\widetilde{s}_{l+1}^j} - \frac{d_{nK_j-l}}{\widetilde{s}_l^j} \right|^2} \\
&= \frac{1}{\| \phi_j \| K_j} \sqrt{\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \sum_{n\in Z} \left| \frac{d_{nK_j-l-1}}{\widetilde{s}_{l+1}^j} - \frac{d_{nK_j-l}}{\widetilde{s}_l^j} \right|^2}.
\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

为了估计 $\mathrm{Var}(\phi_j)$，正像第二章中做的一样，我们需要对 $\{d_k\}_k$ 添加条件.

引理 3.2.3.1 假设 $\left\{\frac{d_{k+1}}{d_k} - 1\right\}_k \in l^2$. 那么存在绝对常数 M_0(不依赖 j)使得

$$\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \sum_{n\in Z} \left| \frac{d_{nK_j-l-1}}{\widetilde{s}_{l+1}^j} - \frac{d_{nK_j-l}}{\widetilde{s}_l^j} \right|^2 \leqslant M_0. \tag{3.2.36}$$

证明 由条件$\left\{\frac{d_{k+1}}{d_k}-1\right\}_k\in l^2$和不等式$|a+b|^2\leqslant 2(|a|^2+|b|^2)$知，

$$\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left|\frac{d_{nK_j-l-1}}{\widetilde{s}_{l+1}^j}-\frac{d_{nK_j-l}}{\widetilde{s}_l^j}\right|^2$$

$$\leqslant 2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left(\left|\frac{d_{nK_j-l-1}}{\widetilde{s}_{l+1}^j}-\frac{d_{nK_j-l-1}}{\widetilde{s}_l^j}\right|^2+\left|\frac{d_{nK_j-l-1}}{\widetilde{s}_l^j}-\frac{d_{nK_j-l}}{\widetilde{s}_l^j}\right|^2\right)$$

$$\leqslant 2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left[\left(\frac{d_{nK_j-l-1}}{d_{nK_j-l}}-1\right)^2+d_{nK_j-l-1}^2\left(\frac{1}{\widetilde{s}_l^j}-\frac{1}{\widetilde{s}_{l+1}^j}\right)^2\right]$$

$$\leqslant 2M_1+2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\frac{1}{(\widetilde{s}_l^j)^2}\left(\sum_{n\in Z}\left(d_{nK_j-l-1}-d_{nK_j-l}\right)\right)^2$$

$$\leqslant 2M_1+2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\frac{1}{(\widetilde{s}_l^j)^2}\sum_{n\in Z}\left(\frac{d_{nK_j-l-1}}{d_{nK_j-l}}-1\right)^2\cdot\sum_{n\in Z}d_{nK_j-l}^2$$

$$\leqslant M_0.$$

证毕.

从这个引理,我们有

$$|\operatorname{Var}(\phi_j)|\leqslant\frac{M_0}{\|\phi_j\|K_j}. \tag{3.2.37}$$

因此 $\operatorname{Var}(\phi_j)$的性质由 ϕ_j 决定.

引理 3.2.3.2 $\lim\limits_{j\to\infty}\frac{1}{\|\phi_j\|K_j}=0$.

证明 根据 $\phi_j(t)$的定义,我们有

$$K_j^2\|\phi_j\|^2=\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\frac{d_{nK_j-l}^2}{(\widetilde{s}_l^j)^2}\geqslant\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\frac{d_{-l}^2}{(\widetilde{s}_l^j)^2}.$$

对固定的 l,我们得到

$$\lim_{j\to\infty}\frac{d_{-l}}{\widetilde{s}_l^j}=1.$$

所以当 j 趋向无穷时,结论得证. 证毕.

由引理 3.2.3.1 和引理 3.2.3.2,我们有下列定理.

定理 3.2.3.1 假设$\left\{\frac{d_{k+1}}{d_k}-1\right\}_k \in l^2$. 那么

$$\lim_{j\to\infty}\mathrm{Var}(\phi_j) = 0.$$

这个定理告诉我们 $\phi_j(t)$具有很好的局部性质(j 很大时). 但是我们想知道 ϕ_j 局部化程度究竟有多大(当 j 变得越来越大时).

引理 3.2.3.3 假设$\{d_k\}_k$ 满足条件

$$\inf_{\substack{|l|\leqslant K_{j-1}\\ j\geqslant 0}} \frac{d_{-l}}{\tilde{s}_l^j} \geqslant C, \tag{3.2.38}$$

那么我们有

$$\|\phi_j\|^2 = O\left(\frac{1}{K_j}\right)(j\to+\infty), \tag{3.2.39}$$

其中 C 为常数.

证明 根据$\|\phi_j\|^2$ 的表示式,我们有

$$\|\phi_j\|^2 < \frac{1}{K_j}.$$

又由(3.2.38)式,我们也有

$$\|\phi_j\|^2 \geqslant \frac{1}{K_j^2}CK_j = \frac{C}{K_j}.$$

因此结论证毕.

这样我们得到

定理 3.2.3.2 设$\{d_k\}_k$ 满足条件(3.2.38)式和$\left\{\frac{d_{k+1}}{d_k}-1\right\}_k$ $\in l^2$. 那么

$$|\mathrm{Var}(\phi_j)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{K_j}}\right)(j\to\infty).$$

§3.3 PCIW 的局部性质

在这一节里,我们也用角频局部化方法来讨论 PCIW 的局部

性质.约定:在这一节中,常数 C 在不同的地方可能不同.这一节的主要结果为

定理 3.3.1 假设$\{d_k\}_k \in l^1$, $\left\{1-\frac{d_{k+1}}{d_k}\right\}_k \in l^2$ 和(3.2.38)式成立.那么

$$|\operatorname{Var}(L_j)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{K_j}}\right)(j \to \infty). \tag{3.3.1}$$

3.3.1 几个引理

为了证明定理 3.3.1,我们需要给出一些辅助结果.

引理 3.3.1.1

$$L_j(x) = \frac{1}{K_j}\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left[\frac{M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(x) - (M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(x)}{M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(0) + (M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(0)}\right]e^{ilh_{j+1}},$$

其中

$$M_l^{j+1} = \frac{\|Z_{K_j+l}^{j+1}\|}{\|Z_l^{j+1}\|}.$$

证明 因为 $2K_j = K_{j+1}$ 和 $Z_{K_{j+1}+l}^{j+1}(x) = Z_l^{j+1}(x)$,所以

$$R_l^j(x) = \left\{\frac{\|Z_{K_j+l}^{j+1}\|}{\|Z_l^j\|}\frac{Z_l^{j+1}(x)}{\|Z_l^{j+1}\|} - \frac{\|Z_l^{j+1}\|}{\|Z_l^j\|}\frac{Z_{K_j+l}^{j+1}(x)}{\|Z_{K_j+l}^{j+1}\|}\right\}e^{ilh_{j+1}}$$

$$= \frac{1}{\|Z_l^j\|}\left\{M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(x) - (M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(x)\right\}e^{ilh_{j+1}},$$

$$R_l^j(h_{j+1}) = \left\{c_l^{j+1}\frac{Z_l^{j+1}(h_{j+1})}{\|Z_l^{j+1}\|} - c_{K_j+l}^{j+1}\frac{Z_{K_j+l}^{j+1}(h_{j+1})}{\|Z_{K_j+l}^{j+1}\|}\right\}e^{ilh_{j+1}}$$

$$= \frac{1}{\|Z_l^j\|}\left\{M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(0) + (M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(0)\right\}.$$

从而,由 $L_j(x)$的定义,我们得到

$$L_j(x) = \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(x) - (M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(x)}{M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(0) + (M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(0)}e^{ilh_{j+1}}.$$

从上面公式和 $M_{t+K_j}^{j+1}=(M_t^{j+1})^{-1}, K_jh_{j+1}=\pi$ 知，

$$L_j(x)=\frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_{j-1}-1}\frac{M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(x)-(M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(x)}{M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(0)+(M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(0)}e^{ilh_{j+1}}$$

$$+\frac{1}{K_j}\sum_{l=K_{j-1}}^{K_j-1}\frac{M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(x)-(M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(x)}{M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(0)+(M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(0)}e^{ilh_{j+1}}$$

$$=\frac{1}{K_j}\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\frac{M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(x)-(M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(x)}{M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(0)+(M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(0)}e^{ilh_{j+1}}.$$

证毕.

引理 3.3.1.2 让 $L_j(x)$是 PCIW,那么

(a)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ix}|L_j(x)|^2dx$$

$$=\frac{e^{ih_{j+1}}}{K_j^2}\left[\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}X_{n,l}+\sum_{n\in Z}(Y_n+Z_n)\right],\qquad(3.3.2)$$

其中

$$X_{n,l}=\left[M_l^{j+1}M_{l+1}^{j+1}d_{nK_{j+1}-l}d_{nK_{j+1}-(l+1)}+(M_l^{j+1}M_{l+1}^{j+1})^{-1}\times d_{nK_{j+1}-(K_j+l)}d_{nK_{j+1}-(K_j+l+1)}\right]/\left\{\left[M_l^{j+1}\widetilde{s}_l^{j+1}+(M_l^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_j+l}^{j+1}\right]\times\left[M_{l+1}^{j+1}\widetilde{s}_{l+1}^{j+1}+(M_{l+1}^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}\right]\right\},$$

$$Y_n=d_{nK_{j+1}+K_{j-1}}d_{(n+1)K_{j+1}-(K_j+K_{j-1}-1)}M_{-K_{j-1}}^{j+1}(M_{K_{j-1}-1}^{j+1})^{-1}/\left\{\left[M_{-K_{j-1}}^{j+1}\widetilde{s}_{-K_{j-1}}^{j+1}+(M_{-K_{j-1}}^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_{j-1}}^{j+1}\right]\times\left[M_{K_{j-1}-1}^{j+1}\widetilde{s}_{K_{j-1}-1}^{j+1}+(M_{K_{j-1}-1}^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_j+K_{j-1}-1}^{j+1}\right]\right\},$$

$$Z_n=d_{nK_{j+1}-K_{j-1}+1}d_{nK_{j+1}-K_{j-1}}M_{K_{j-1}-1}^{j+1}(M_{-K_{j-1}}^{j+1})^{-1}/\left\{\left[M_{-K_{j-1}}^{j+1}\widetilde{s}_{-K_{j-1}}^{j+1}+(M_{-K_{j-1}}^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_{j-1}}^{j+1}\right]\times\left[M_{K_{j-1}-1}^{j+1}\widetilde{s}_{K_{j-1}-1}^{j+1}+(M_{K_{j-1}-1}^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_j+K_{j-1}-1}^{j+1}\right]\right\}.$$

(b)

$$\| L_j \|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | L_j(x) |^2 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{K_j^2}\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left[\frac{(M_l^{j+1})^2 d_{nK_{j+1}-l}^2 + (M_l^{j+1})^{-2} d_{nK_{j+1}-K_j-l}^2}{(M_l^{j+1}\widetilde{s}_l^{j+1} + (M_l^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_j+l}^{j+1})^2}\right], \tag{3.3.3}$$

其中 $\widetilde{s}_l^j$ 的定义见(3.2.31)式.

证明 (a)由引理3.3.1.1知,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} | L_j(x) |^2 \mathrm{d}x = A_1 - A_2 - A_3 + A_4, \tag{3.3.4}$$

其中

$$A_1 = \frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}M_l^{j+1}M_k^{j+1}Z_l^{j+1}(x)\overline{Z_k^{j+1}(x)}\mathrm{d}x$$
$$\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-k)h_{j+1}}/\left\{\left[M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(0) + (M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(0)\right]\right.$$
$$\left.\times\left[M_k^{j+1}Z_k^{j+1}(0) + (M_k^{j+1})^{-1}Z_{K_j+k}^{j+1}(0)\right]\right\},$$

$$A_2 = \frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}M_l^{j+1}(M_k^{j+1})^{-1}Z_l^{j+1}(x)\overline{Z_{K_j+k}^{j+1}(x)}\mathrm{d}x$$
$$\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-k)h_{j+1}}/\left\{\left[M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(0) + (M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(0)\right]\right.$$
$$\left.\times\left[M_k^{j+1}Z_k^{j+1}(0) + (M_k^{j+1})^{-1}Z_{K_j+k}^{j+1}(0)\right]\right\},$$

$$A_3 = \frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(M_l^{j+1})^{-1}M_k^{j+1}Z_{K_j+l}^{j+1}(x)\overline{Z_k^{j+1}(x)}\mathrm{d}x$$
$$\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-k)h_{j+1}}/\left\{\left[M_l^{j+1}Z_l^{j+1}(0) + (M_l^{j+1})^{-1}Z_{K_j+l}^{j+1}(0)\right]\right.$$
$$\left.\times\left[M_k^{j+1}Z_k^{j+1}(0) + (M_k^{j+1})^{-1}Z_{K_j+k}^{j+1}(0)\right]\right\},$$

$$A_4 = \frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(M_l^{j+1}M_k^{j+1})^{-1}$$
$$\times Z_{K_j+l}^{j+1}(x)\overline{Z_{K_j+k}^{j+1}(x)}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-k)h_{j+1}}/$$

$$\times \left\{ \left[M_l^{j+1} Z_l^{j+1}(0) + (M_l^{j+1})^{-1} Z_{K_j+l}^{j+1}(0) \right] \right.$$

$$\left. \times \left[M_k^{j+1} Z_k^{j+1}(0) + (M_k^{j+1})^{-1} Z_{K_j+k}^{j+1}(0) \right] \right\}.$$

现在我们分别计算 A_1 和 A_2. 应用 $Z_l^{j+1}(x)$的定义,我们得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z_l^{j+1}(x)\, \overline{Z_k^{j+1}(x)} e^{ix} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{j+1}^2 \sum_{n\in Z} d_{nK_{j+1}-l} \sum_{m\in Z} d_{mK_{j+1}-k} \times e^{i[(n-m)K_{j+1}+(1+k-l)]x} dx,$$

这等于 $K_{j+1}^2 \sum_{n\in Z} d_{nK_{j+1}-(k+1)} d_{nK_{j+1}-k}$ 如果$l = k+1$和 $n = m$,其他等于0. 因而

$$A_1 = \frac{1}{K_j^2} \sum_{k=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} M_k^{j+1} M_{k+1}^{j+1} \sum_{n\in Z} d_{nK_{j+1}-k} d_{nK_{j+1}-(k+1)} e^{ih_{j+1}} /$$

$$\left\{ \left[M_k^{j+1} \frac{Z_k^{j+1}(0)}{K_{j+1}} + (M_k^{j+1})^{-1} \frac{Z_{K_j+k}^{j+1}(0)}{K_{j+1}} \right] \right.$$

$$\left. \times \left[M_{k+1}^{j+1} \frac{Z_{k+1}^{j+1}(0)}{K_{j+1}} + (M_{k+1}^{j+1})^{-1} \frac{Z_{K_j+k+1}^{j+1}(0)}{K_{j+1}} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{K_j^2} \sum_{k=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} M_k^{j+1} M_{k+1}^{j+1} \sum_{n\in Z} d_{nK_{j+1}-k} d_{nK_{j+1}-(k+1)} e^{ih_{j+1}} /$$

$$\left\{ \left[M_k^{j+1} \tilde{s}_k^{j+1} + (M_k^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+k}^{j+1} \right] \right.$$

$$\left. \times \left[M_{k+1}^{j+1} \tilde{s}_{k+1}^{j+1} + (M_{k+1}^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+k+1}^{j+1} \right] \right\}, \qquad (3.3.5)$$

其中 $\tilde{s}_k^j = \dfrac{Z_k^j(0)}{K_j} = \sum_{n\in Z} d_{nK_j-k}$.

再使用 $Z_l^j(x)$的定义,我们看到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z_l^{j+1}(x)\, \overline{Z_{K_j+k}^{j+1}(x)} e^{ix} dx$$

等于 $-K_{j+1}^2 \sum_{n\in Z} d_{nK_{j+1}-l}\, d_{(n+1)K_{j+1}-(K_j+k)} M_l^{j+1} (M_k^{j+1})^{-1}$,如果 l

$=-K_{j-1}$和 $k=K_{j-1}-1$,其他等于 0. 这表明

$$A_2=-\frac{e^{ih_{j+1}}}{K_j^2}\frac{1}{\left[M_{K_{j-1}-1}^{j+1}\widetilde{s}_{K_{j-1}-1}^{j+1}+(M_{K_{j-1}-1}^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_j+K_{j-1}-1}^{j+1}\right]}$$

$$\times\sum_{n\in Z}\frac{d_{nK_{j+1}+K_{j-1}}d_{(n+1)K_{j+1}-(K_j+K_{j-1}-1)}M_{-K_{j-1}}^{j+1}(M_{K_{j-1}-1}^{j+1})^{-1}}{\left[M_{-K_{j-1}}^{j+1}\widetilde{s}_{-K_{j-1}}^{j+1}+(M_{-K_{j-1}}^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_{j-1}}^{j+1}\right]},\tag{3.3.6}$$

这里我们使用了 $K_j-K_{j-1}=K_{j-1}$.

因为 A_4 和 A_3 分别类似于 A_1 和 A_2,所以

$$A_3=-\frac{e^{ih_{j+1}}}{K_j^2}\frac{1}{\left[M_{K_{j-1}-1}^{j+1}\widetilde{s}_{K_{j-1}-1}^{j+1}+(M_{K_{j-1}-1}^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_j+K_{j-1}-1}^{j+1}\right]}$$

$$\times\sum_{n\in Z}\frac{d_{nK_{j+1}-K_{j-1}+1}d_{nK_{j+1}-K_{j-1}}M_{K_{j-1}-1}^{j+1}(M_{-K_{j-1}}^{j+1})^{-1}}{\left[M_{-K_{j-1}}^{j+1}\widetilde{s}_{-K_{j-1}}^{j+1}+(M_{-K_{j-1}}^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_{j-1}}^{j+1}\right]},\tag{3.3.7}$$

$$A_4=\frac{e^{ih_{j+1}}}{K_j^2}$$

$$\times\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}(M_l^{j+1}M_{l+1}^{j+1})^{-1}d_{nK_{j+1}-(K_j+l)}d_{nK_{j+1}-(K_j+l+1)}/$$

$$\left\{\left[M_l^{j+1}\widetilde{s}_l^{j+1}+(M_l^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_j+l}^{j+1}\right]\right.$$

$$\left.\times\left[M_{l+1}^{j+1}\widetilde{s}_{l+1}^{j+1}+(M_{l+1}^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}\right]\right\}.\tag{3.3.8}$$

结合(3.3.4)式,(3.3.5)式,(3.3.6)式,(3.3.7)式和(3.3.8)式,我们立即可得到(3.3.2)式.

(b) $\|L_j\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|L_j(x)|^2dx$ 的计算类似于 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|L_j(x)|^2e^{ix}dx$ 的计算. 证毕.

在下列两个引理中,我们假设 $\left\{\frac{d_{n+1}}{d_n}-1\right\}_n\in l^2$, $\{d_n\}_n\in l^1$ 和 $Q_l=\sum_{n\in Z}d_{nK_{j+1}-l}^2$.

注记3.3.1.1 显然，$\left\{\frac{d_{n+1}}{d_n}-1\right\}_n \in l^2$ 等价于 $\left\{\frac{d_n}{d_{n+1}}-1\right\}_n \in l^2$. 因此我们不加区别地使用这两个条件.

引理3.3.1.3 存在常数 C_1 和 C_2(不依赖 j)使得

$$\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{(M_l^{j+1})^2}{(M_{l+1}^{j+1})^2}-1\right|^2 \leqslant C_1, \tag{3.3.9}$$

$$\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{(M_{l+1}^{j+1})^2}{(M_l^{j+1})^2}-1\right|^2 \leqslant C_2. \tag{3.3.10}$$

证明 由 M_l^{j+1} 和 Z_l^{j+1} 的定义，我们有

$$(M_l^{j+1})^2=\frac{\| Z_{K_j+l}^{j+1}\|^2}{\| Z_l^{j+1}\|^2}=\frac{Q_{K_j+l}}{Q_l}.$$

使用不等式 $|a+b|^2\leqslant 2(|a|^2+|b|^2)$，我们可得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{(M_l^{j+1})^2}{(M_{l+1}^{j+1})^2}-1\right|^2\\
&=\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{Q_{K_j+l}}{Q_l}\times\frac{Q_{l+1}}{Q_{K_j+l+1}}-1\right|^2\\
&=\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\left(\frac{Q_{L+1}}{Q_l}-1\right)\left[\frac{Q_{K_j+l}}{Q_{K_j+l+1}}\right]+\frac{Q_{K_j+l}}{Q_{K_j+l+1}}-1\right|^2\\
&\leqslant I_1+I_2,
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

其中

$$I_1=2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\left(\frac{Q_{l+1}}{Q_l}-1\right)\left[\frac{Q_{K_j+l}}{Q_{K_j+l+1}}-1\right]+\left(\frac{Q_{l+1}}{Q_l}-1\right)\right|^2,$$

$$I_2=2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{Q_{K_j+l}-Q_{K_j+l+1}}{Q_{K_j+l+1}}\right|^2.$$

估计 I_1 和 I_2 如下:

$$I_1\leqslant 4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left[\left|\left(\frac{Q_{l+1}}{Q_l}-1\right)\left[\frac{Q_{K_j+l}}{Q_{K_j+l+1}}-1\right]\right|^2+\left|\left(\frac{Q_{l+1}}{Q_l}-1\right)\right|^2\right]$$

$$\leqslant 4\left\{\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\left(\frac{Q_{l+1}}{Q_l}-1\right)\left(\frac{Q_{K_j+l}}{Q_{K_j+l+1}}-1\right)\right|\right\}^2+4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left(\frac{Q_{l+1}}{Q_l}-1\right)^2$$

$$\leqslant 4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left(\frac{Q_{l+1}}{Q_l}-1\right)^2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left(\frac{Q_{K_j+l}}{Q_{K_j+l+1}}-1\right)^2+4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left(\frac{Q_{l+1}}{Q_l}-1\right)^2. \tag{3.3.12}$$

由(3.3.12)式知,只需要估计 I_2 有不依赖于 j 的界即可.

事实上,由不等式 $\frac{\sum_{n\in Z}d^4_{nK_{j+1}-K_j-l-1}}{(Q_{K_j+l+1})^2}\leqslant 1$, 我们知道

$$I_2\leqslant 2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{\left(\sum_{n\in Z}d^4_{nK_{j+1}-K_j-l-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n\in Z}\left(\frac{d^2_{nK_{j+1}-K_j-l}}{d^2_{nK_{j+1}-K_j-l-1}}-1\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{Q_{K_j+l+1}}\right|^2$$

$$\leqslant 2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left(\frac{d_{nK_{j+1}-K_j-l}}{d_{nK_{j+1}-K_j-l-1}}-1\right)^2\times\left(\frac{d_{nK_{j+1}-K_j-l}}{d_{nK_{j+1}-K_j-l-1}}+1\right)^2. \tag{3.3.13}$$

条件 $\left\{\frac{d_{n+1}}{d_n}-1\right\}_n\in l^2$ 蕴含 $\left|\frac{d_{nK_{j+1}-K_j-l}}{d_{nK_{j+1}-K_j-l-1}}+1\right|$ 有界,所以由(3.3.13)式,我们推出

$$I_2\leqslant C\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left(\frac{d_{nK_{j+1}-K_j-l}}{d_{nK_{j+1}-K_j-l-1}}-1\right)^2, \tag{3.3.14}$$

其中 C 不依赖于 j.

再次使用条件 $\left\{\frac{d_{n+1}}{d_n}-1\right\}_n\in l^2$,我们得到存在不依赖于 j 的常数 C 使得

$$\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left(\frac{d_{nK_{j+1}-K_j-l}}{d_{nK_{j+1}-K_j-l-1}}-1\right)^2\leqslant C, \tag{3.3.15}$$

这表明(3.3.9)式成立.

现证(3.3.10)式.

$$\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{(M_{l+1}^{j+1})^2}{(M_l^{j+1})^2}-1\right|^2$$

$$=\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\left(\frac{Q_l}{Q_{l+1}}-1\right)\frac{Q_{K_j+l+1}}{Q_{K_j+l}}+\frac{Q_{K_j+l+1}}{Q_{K_j+l}}-1\right|^2$$

$$\leqslant 2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\left(\frac{Q_l}{Q_{l+1}}-1\right)\frac{Q_{K_j+l+1}}{Q_{K_j+l}}\right|^2+2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{Q_{K_j+l+1}}{Q_{K_j+l}}-1\right|^2$$

$$\leqslant 4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left(\frac{Q_l}{Q_{l+1}}-1\right)^2\left(\frac{Q_{K_j+l+1}}{Q_{K_j+l}}-1\right)^2+4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{Q_l}{Q_{l+1}}-1\right|^2$$

$$+2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{Q_{K_j+l+1}}{Q_{K_j+l}}-1\right|^2$$

$$\leqslant 4\left(\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left(\frac{Q_l}{Q_{l+1}}-1\right)^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left(\frac{Q_{K_j+l+1}}{Q_{K_j+l}}-1\right)^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{Q_l}{Q_{l+1}}-1\right|^2+2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{Q_{K_j+l+1}}{Q_{K_j+l}}-1\right|^2.$$

所以从(3.3.11)式中 I_2 的估计,我们得到(3.3.10)式成立.证毕.

引理 3.3.1.4 存在不依赖于 j 的常数 C 使得

$$\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{\tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}}{\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}}-1\right|^2\leqslant C. \qquad (3.3.16)$$

证明 由 $\tilde{s}_l^j$ 的定义,容易知道

$$\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}=\sum_{n\in Z}d_{nK_{j+1}-K_j-l}.$$

因此使用 Schwarz 不等式和

$$Q_{K_j+l}\leqslant\left(\sum_{n\in Z}d_{nK_{j+1}-K_j-l}\right)^2$$

我们得到

$$\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l+1}}{\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}-1\right|^2$$

$$\leqslant\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\frac{Q_{K_j+l}}{(\sum_{n\in Z}d_{nK_{j+1}-K_j-l})^2}\sum_{n\in Z}\left(\frac{d_{nK_{j+1}-K_j-l-1}}{d_{nK_{j+1}-K_j-l}}-1\right)^2$$

$$\leqslant\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left(\frac{d_{nK_{j+1}-K_j-l-1}}{d_{nK_{j+1}-K_j-l}}-1\right)^2.$$

因而(3.3.16)式立即来自条件$\left\{\frac{d_n}{d_{n+1}}-1\right\}_n\in l^2$. 证毕.

3.3.2 定理 3.3.1 的证明

从(3.3.2)式,我们推出

$$|\tau(L_j)|=\frac{1}{\|L_j\|^2}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|L_j(x)|^2\mathrm{d}x\right|$$

$$=\frac{1}{\|L_j\|^2K_j^2}\Big[\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}X_{n,l}+\sum_{n\in Z}(Y_n+X_n)\Big].$$

容易看到

$$|\tau(L_j)|\leqslant 1.$$

因此从 $\mathrm{Var}(L_j)$的定义,我们得到

$$|\mathrm{Var}(L_j)|=1-\frac{1}{\|L_j\|^2K_j^2}\Big[\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}X_{n,l}+\sum_{n\in Z}(Y_n+X_n)\Big]$$

$$\leqslant\frac{1}{\|L_j\|^2K_j^2}\left|\Big(\|L_j\|^2K_j^2-\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}X_{n,l}\Big)\right|. \tag{3.3.17}$$

结合(3.3.3)式,(3.3.17)式和 $X_{n,l}$的定义,我们从三角不等式知

$$|\mathrm{Var}(L_j)|$$

$$=\frac{1}{\|L_j\|^2K_j^2}\left|\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left\{\left[\frac{(M_l^{j+1})^2d^2_{nK_{j+1}-l}+(M_l^{j+1})^{-2}d^2_{nK_{j+1}-K_j-l}}{(M_l^{j+1}\tilde{s}^{j+1}_l+(M_l^{j+1})^{-1}\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l})^2}\right]\right.\right.$$

$$
- \Big[M_l^{j+1} M_{l+1}^{j+1} d_{nK_{j+1}-l} d_{nK_{j+1}-(l+1)}
$$

$$
+ (M_l^{j+1} M_{l+1}^{j+1})^{-1} d_{nK_{j+1}-(K_j+l)} d_{nK_{j+1}-(K_j+l+1)} \Big] \Big/
$$

$$
\Big\{ \Big[M_l^{j+1} \tilde{s}_l^{j+1} + (M_l^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+l}^{j+1} \Big]
$$

$$
\times \Big[M_{l+1}^{j+1} \tilde{s}_{l+1}^{j+1} + (M_{l+1}^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1} \Big] \Big\} \Bigg| \Bigg\}
$$

$$
\leqslant \frac{1}{\| L_j \|^2 K_j^2} \sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \sum_{n \in Z} \Bigg| \frac{(M_l^{j+1})^2 d_{nK_{j+1}-l}^2}{(M_l^{j+1} \tilde{s}_l^{j+1} + (M_l^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+l}^{j+1})^2}
$$

$$
- \frac{M_l^{j+1} M_{l+1}^{j+1} d_{nK_{j+1}-l} d_{nK_{j+1}-(l+1)}}{\Big[M_l^{j+1} \tilde{s}_l^{j+1} + (M_l^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+l}^{j+1} \Big] \Big[M_{l+1}^{j+1} \tilde{s}_{l+1}^{j+1} + (M_{l+1}^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1} \Big]} \Bigg|
$$

$$
+ \frac{1}{\| L_j \|^2 K_j^2} \sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \sum_{n \in Z} \Bigg| \frac{(M_l^{j+1})^{-2} d_{nK_{j+1}-K_j-l}^2}{(M_l^{j+1} \tilde{s}_l^{j+1} + (M_l^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+l}^{j+1})^2}
$$

$$
- \frac{(M_l^{j+1} M_{l+1}^{j+1})^{-1} d_{nK_{j+1}-(K_j+l)} d_{nK_{j+1}-(K_j+l+1)}}{\Big[M_l^{j+1} \tilde{s}_l^{j+1} + (M_l^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+l}^{j+1} \Big] \Big[M_{l+1}^{j+1} \tilde{s}_{l+1}^{j+1} + (M_{l+1}^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1} \Big]} \Bigg|
$$

$$
= \frac{1}{\| L_j \|^2 K_j^2} (B_1 + B_2). \tag{3.3.18}
$$

使用两次 Schwarz 不等式，我们可估计 B_1 如下：

$$
B_1 \leqslant \sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \sqrt{ \sum_{n \in Z} \left(\frac{M_l^{j+1} d_{nK_{j+1}-l}}{M_l^{j+1} \tilde{s}_l^{j+1} + (M_l^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}} \right)^2 }
$$

$$
\times \left\{ \sum_{n \in Z} \left| \left(\frac{M_l^{j+1} d_{nK_{j+1}-l}}{M_l^{j+1} \tilde{s}_l^{j+1} + (M_l^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}} \right) \right. \right.
$$

$$
\left. \left. - \left(\frac{M_{l+1}^{j+1} d_{nK_{j+1}-l-1}}{M_{l+1}^{j+1} \tilde{s}_{l+1}^{j+1} + (M_{l+1}^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}} \right) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}
$$

$$
\leqslant \sqrt{ \sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \sum_{n \in Z} \left(\frac{M_l^{j+1} d_{nK_{j+1}-l}}{M_l^{j+1} \tilde{s}_l^{j+1} + (M_l^{j+1})^{-1} \tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}} \right)^2 }
$$

$$\times\left\{\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left|\left(\frac{M_l^{j+1}d_{nK_{j+1}-l}}{M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}+(M_l^{j+1})^{-1}\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{M_{l+1}^{j+1}d_{nK_{j+1}-l-1}}{M_{l+1}^{j+1}\tilde{s}_{l+1}^{j+1}+(M_{l+1}^{j+1})^{-1}\tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}}\right)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.19}$$

但是,由(3.3.3)式,

$$\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left[\frac{M_l^{j+1}d_{nK_{j+1}-l}}{M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}+(M_l^{j+1})^{-1}\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}}\right]^2$$

$$\leqslant\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left\{\frac{M_l^{j+1}d_{nK_{j+1}-l})^2+(M_l^{j+1})^{-2}d_{nK_{j+1}-K_j-l}^2}{\left[M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}+(M_l^{j+1})^{-1}\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}\right]^2}\right\}$$

$$=\|L_j\|^2K_j^2.$$

所以从 (3.3.19)式,我们知道

$$B_1\leqslant\|L_j\|K_j\times I, \tag{3.3.20}$$

其中

$$I=\left\{\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left|\left(\frac{M_l^{j+1}d_{nK_{j+1}-l}}{M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}+(M_l^{j+1})^{-1}\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{M_{l+1}^{j+1}d_{nK_{j+1}-l-1}}{M_{l+1}^{j+1}\tilde{s}_{l+1}^{j+1}+(M_{l+1}^{j+1})^{-1}\tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}}\right)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

类似地,B_2 的估计是

$$B_2\leqslant\|L_j\|K_j\times II, \tag{3.3.21}$$

其中

$$II=\left\{\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left|\left(\frac{(M_l^{j+1})^{-1}d_{nK_{j+1}-K_j-l}}{M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}+(M_l^{j+1})^{-1}\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}}\right)\right.\right.$$

$$-\left(\frac{(M_{l+1}^{j+1})^{-1}d_{nK_{j+1}-K_j-l-1}}{M_{l+1}^{j+1}\,\tilde{s}_{l+1}^{j+1}+(M_{l+1}^{j+1})^{-1}\,\tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}}\right)\Bigg|^2\Bigg\}^{\frac{1}{2}}.$$

结合(3.3.18)式,(3.3.20)式 和 (3.3.21) 式,我们有

$$|\operatorname{Var}(L_j)|\leqslant\frac{1}{\|L_j\|K_j}(I+II).\qquad(3.3.22)$$

为了建立(3.3.1)式,从(3.3.22)式可看出,只需证存在不依赖于 j 的常数 C 使得

$$(I+II)\leqslant C,\qquad(3.3.23)$$

$$\frac{1}{\|L_j\|K_j}=O\left(\frac{1}{\sqrt{K_j}}\right)\quad(j\to\infty)\qquad(3.3.24)$$

即可.

我们首先建立(3.3.23)式.

$$I^2\leqslant 2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\Bigg|\left(\frac{M_{l+1}^{j+1}d_{nK_{j+1}-l-1}}{M_{l+1}^{j+1}\,\tilde{s}_{l+1}^{j+1}+(M_{l+1}^{j+1})^{-1}\,\tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}}\right)$$

$$-\left(\frac{M_l^{j+1}d_{nK_{j+1}-l-1}}{M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}+(M_l^{j+1})^{-1}\,\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}}\right)\Bigg|^2$$

$$+2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\Bigg|\left(\frac{M_l^{j+1}d_{nK_{j+1}-l-1}}{M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}+(M_l^{j+1})^{-1}\,\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}}\right)$$

$$-\left(\frac{M_l^{j+1}d_{nK_{j+1}-l}}{M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}+(M_l^{j+1})^{-1}\,\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}}\right)\Bigg|^2$$

$$=I_{11}^2+I_{12}^2.\qquad(3.3.25)$$

因为 $\sum_{n\in Z}d^2_{nK_{j+1}-l-1}\leqslant\left(\sum_{n\in Z}d_{nK_{j+1}-l-1}\right)^2=(\tilde{s}_{l+1}^{j+1})^2$, 所以

$$I_{11}^2\leqslant 4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}d^2_{nK_{j+1}-l-1}$$

$$\times\left|\frac{M_{l+1}^{j+1}M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}-M_{l+1}^{j+1}M_l^{j+1}\tilde{s}_{l+1}^{j+1}}{M_{l+1}^{j+1}\tilde{s}_{l+1}^{j+1}+(M_{l+1}^{j+1})^{-1}\tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}}\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}+(M_l^{j+1})^{-1}\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}}\right|^2$$

$$+4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}d_{nK_{j+1}-l-1}^2$$

$$\times\left|\frac{M_{l+1}^{j+1}(M_l^{j+1})^{-1}\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}-(M_{l+1}^{j+1})^{-1}M_l^{j+1}\tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}}{M_{l+1}^{j+1}\tilde{s}_{l+1}^{j+1}+(M_{l+1}^{j+1})^{-1}\tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}}\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}+(M_l^{j+1})^{-1}\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}}\right|^2$$

$$\leqslant 4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}d_{nK_{j+1}-l-1}^2$$

$$\times\left|\frac{M_{l+1}^{j+1}M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}-M_{l+1}^{j+1}M_l^{j+1}\tilde{s}_{l+1}^{j+1}}{M_{l+1}^{j+1}M_l^{j+1}\tilde{s}_l^{j+1}\tilde{s}_{l+1}^{j+1}}\right|^2$$

$$+4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}(\tilde{s}_{l+1}^{j+1})^2$$

$$\times\left|\frac{(M_{l+1}^{j+1})^2\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}-(M_l^{j+1})^2\tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}}{\left[(M_{l+1}^{j+1})^2\tilde{s}_{l+1}^{j+1}+\tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}\right]\left[(M_l^{j+1})^2\tilde{s}_l^{j+1}+\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}\right]}\right|^2$$

由 M_l^j 的定义，

$$I_{11}^2\leqslant 4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}d_{nK_{j+1}-l-1}^2\left|\frac{1}{\tilde{s}_{l+1}^{j+1}}-\frac{1}{\tilde{s}_l^{j+1}}\right|^2$$

$$+4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}(\tilde{s}_{l+1}^{j+1})^2$$

$$\times\left[\frac{(M_{l+1}^{j+1})^2\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}-(M_l^{j+1})^2\tilde{s}_{K_j+l+1}^{j+1}}{(M_{l+1}^{j+1})^2\tilde{s}_{l+1}^{j+1}\left[(M_l^{j+1})^2\tilde{s}_l^{j+1}+\tilde{s}_{K_j+l}^{j+1}\right]}\right]^2. \tag{3.3.26}$$

从引理 3.3.1.4 知,(3.3.26)式中的第一项是有界的且界不依赖于 j. 我们需要估计第二项.

$$\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}(\tilde{s}^{j+1}_{l+1})^2\left[\frac{(M^{j+1}_{l+1})^2\,\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}-(M^{j+1}_{l})^2\,\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l+1}}{(M^{j+1}_{l+1})^2\,\tilde{s}^{j+1}_{l+1}\left[(M^{j+1}_{l})^2\,\tilde{s}^{j+1}_{l}+\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}\right]}\right]^2$$

$$=\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left[\frac{\left[\left(\frac{M^{j+1}_{l}}{M^{j+1}_{l+1}}\right)^2-1\right]\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l+1}+\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l+1}-\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}{(M^{j+1}_{l})^2\,\tilde{s}^{j+1}_{l}+\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}\right]^2$$

$$\leqslant 2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\left[\left(\frac{M^{j+1}_{l}}{M^{j+1}_{l+1}}\right)^2-1\right]\right|^2$$

$$\times\left|\frac{\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l+1}-\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}+\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}{(M^{j+1}_{l})^2\,\tilde{s}^{j+1}_{l}+\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}\right|^2$$

$$+2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l+1}}{\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}-1\right|^2$$

$$\leqslant 4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\left[\left(\frac{M^{j+1}_{l}}{M^{j+1}_{l+1}}\right)^2-1\right]\right|^2\left[\left|\frac{\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l+1}-\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}{\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}\right|^2\right.$$

$$\left.+\left|\frac{s^{j+1}_{K_j+l}}{(M^{j+1}_{l})^2\,\tilde{s}^{j+1}_{l}+\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}\right|^2\right]+2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l+1}}{\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}-1\right|^2$$

$$\leqslant 4\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\left[\left(\frac{M^{j+1}_{l}}{M^{j+1}_{l+1}}\right)^2-1\right]\right|^2$$

$$+2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l+1}}{\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}-1\right|^2$$

$$+4\left[\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\left[\left(\frac{M^{j+1}_{l}}{M^{j+1}_{l+1}}\right)^2-1\right]\right|^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{\widetilde{s}^{j+1}_{K_j+l+1}}{\widetilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}-1\right|^4\right]^{\frac{1}{2}},\tag{3.3.27}$$

其中最后一个不等式来自 Schwarz 不等式.

结合(3,3.9)式,(3.3.16)式和下列事实

$$\left(\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{\widetilde{s}^{j+1}_{K_j+l+1}}{\widetilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}-1\right|^4\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\frac{\widetilde{s}^{j+1}_{K_j+l+1}}{\widetilde{s}^{j+1}_{K_j+l}}-1\right|^2,$$

$$\left(\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\left[\left(\frac{M_l^{j+1}}{M_{l+1}^{j+1}}\right)^2-1\right]\right|^4\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\left|\left[\left(\frac{M_l^{j+1}}{M_{l+1}^{j+1}}\right)^2-1\right]\right|^2,$$

我们得出

$$I_{11}^2\leqslant C,\tag{3.3.28}$$

其中 C 不依赖于 j.

至于 I_{12}^2,它的估计是容易的. 根据(3.3.25)式和(3.3.15)式,我们有

$$\begin{aligned}I_{12}^2&\leqslant 2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left(\frac{M_l^{j+1}d_{nK_{j+1}-l}}{M_l^{j+1}\widetilde{s}^{j+1}_l}\right)^2\left(\frac{d_{nK_{j+1}-l-1}}{d_{nK_{j+1}-l}}-1\right)^2\\&\leqslant 2\sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1}\sum_{n\in Z}\left(\frac{d_{nK_{j+1}-l-1}}{d_{nK_{j+1}-l}}-1\right)^2\\&\leqslant C.\end{aligned}\tag{3.3.29}$$

所以由(3.3.25),(3.3.28)和(3.3.29)三式有

$$I\leqslant C.\tag{3.3.30}$$

类似地,用(3.3.10)式代替(3.3.9)式,我们得到

$$II\leqslant C.\tag{3.3.31}$$

因此从(3.3.30)式和(3.3.31)式,我们有(3.3.23)式.

为了证明(3.3.24)式,我们首先注意到

$$(M_l^{j+1})^2=\frac{\sum_{n\in Z}d^2_{nK_{j+1}-K_j-l}}{\sum_{n\in Z}d^2_{nK_{j+1}-l}},$$

所以

$$K_j^2 \| L_j \|^2 \geqslant \sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \sum_{n \in Z} \frac{(M_l^{j+1})^4 d_{nK_{j+1}-l}^2 + d_{nK_{j+1}-K_j-l}^2}{2([(M_l^{j+1})^2 \widetilde{s}_l^{j+1}]^2 + (\widetilde{s}_{K_j+l}^{j+1})^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \frac{Q_{K_j+l} + Q_l}{\frac{Q_{K_j+l}}{Q_l}(\widetilde{s}_l^{j+1})^2 + \frac{Q_l}{Q_{K_j+l}}(\widetilde{s}_{K_j+l}^{j+1})^2}, \tag{3.3.32}$$

其中 $Q_l = \sum_{n \in Z} d_{nK_{j+1}-l}^2$.

条件(3.2.38)式蕴含下列不等式:

$$\frac{Q_l}{(\widetilde{s}_l^{j+1})^2} = \frac{\sum_{n \in Z} d_{nK_{j+1}-l}^2}{\left(\sum_{n \in Z} d_{nK_{j+1}-l}\right)^2} \geqslant \left(\frac{d_{-l}}{\widetilde{s}_l^{j+1}}\right)^2 \geqslant C^2,$$

$$-K_j \leqslant l \leqslant K_j,$$

其中 C 与(3.2.38)式中的 C 一样. 明显地, 如果 $-K_{j-1} \leqslant l \leqslant K_{j-1}-1$, 那么我们也有

$$\frac{Q_l}{(\widetilde{s}_l^{j+1})^2} \geqslant C^2.$$

置 $C_3 = \frac{1}{C^2}$, 那么

$$(\widetilde{s}_l^{j+1})^2 \leqslant C_3 Q_l, \quad -K_{j-1} \leqslant l \leqslant K_{j-1}-1, \tag{3.3.33}$$

这就是我们需要证的.

容易看到

$$\frac{(\widetilde{s}_{K_j+l}^{j+1})^2}{Q_{K_j+l}} = \frac{(\widetilde{s}_{-K_j+l}^{j+1})^2}{Q_{-K_j+l}}. \tag{3.3.34}$$

因此如果 $l \in \{0, \cdots, K_{j-1}-1\}$, 那么

$$-K_j + l \in \{-K_j, \cdots, -K_{j-1}-1\} \subset \{-K_j, \cdots, K_j.$$

进一步, 由(3.2.38)式可推出

$$\frac{d_{-(-K_j+l)}}{\tilde{s}^{j+1}_{-K_j+l}} \geqslant C,$$

这表明

$$\frac{(\tilde{s}^{j+1}_{-K_j+l})^2}{Q_{-K_j+l}} = \frac{(\tilde{s}^{j+1}_{-K_j+l})^2}{d^2_{-(-K_j+l)} + \sum_{n\neq 0} d_{nK_{j+1}-(-K_j+l)}}$$

$$\leqslant \left(\frac{\tilde{s}^{j+1}_{-K_j+l}}{d_{-(-K_j+l)}}\right)^2 \leqslant \frac{1}{C^2}. \tag{3.3.35}$$

如果 $l \in \{-K_{j-1}, \cdots, -1\}$,那么

$$K_j + l \in \{K_{j-1}, \cdots, K_j - 1\} \subset \{-K_j, \cdots, K_j\}.$$

因此,与 (3.3.35)式一样,我们得到

$$\frac{(\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l})^2}{Q_{K_j+l}} \leqslant \frac{1}{C^2}. \tag{3.3.36}$$

将(3.3.34),(3.3.35)和(3.3.36)三式结合起来,我们有

$$(\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l})^2 \leqslant C_3 Q_{K_j+l}. \tag{3.3.37}$$

所以,从(3.3.32),(3.3.33)和(3.3.37)三式,我们推出

$$K_j^2 \| L_j \|^2 \geqslant \frac{1}{2} \sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \frac{Q_{K_j+l} + Q_l}{C_3 Q_{K_j+l} + C_3 Q_l} = \frac{1}{2C_3} K_j. \tag{3.3.38}$$

另一方面,由 不等式 $\sum_{n\in Z} d^2_{nK_{j+1}-l} \leqslant (\tilde{s}^{j+1}_l)^2$, 我们知道

$$K_j^2 \| L_j \|^2$$

$$\leqslant \sum_{l=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \left[\frac{\sum_{n\in Z} d^2_{nK_{j+1}-l}}{(\tilde{s}^{j+1}_l)^2} + \frac{\sum_{n\in Z} d^2_{nK_{j+1}-K_j-l}}{(\tilde{s}^{j+1}_{K_j+l})^2}\right] \leqslant 2K_j. \tag{3.3.39}$$

因而,(3.3.38) 和 (3.3.39)两式表明

$$\frac{K_j}{2C_3} \leqslant K_j^2 \| L_j \|^2 \leqslant 2K_j. \tag{3.3.40}$$

从(3.3.40)式,我们立即建立了(3.3.24)式.证毕.

§3.4　PCIF的对偶局部性质

本节主要讨论定理3.1.4.1中定义的 $\widetilde{\Phi}_j$ 也具有局部性质(本节和下节内容引自[62]),其结果为

定理3.4.1　假设 $\left\{\dfrac{d_k}{d_{k+1}}-1\right\}_k \in l^2$ 且(3.2.38)式成立.那么

$$|\mathrm{Var}(\widetilde{\Phi}_j)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{K_j}}\right) \quad (j \to \infty). \tag{3.4.1}$$

3.4.1　辅助引理

为了证明定理3.4.1,需要下列几个辅助结果.

引理3.4.1.1　设 $a_\nu=\langle \phi_j(\cdot),\phi_j(\cdot-\nu h_j)\rangle$,那么

$$a_\nu = \frac{1}{K_j^2}\sum_{l=0}^{K_j-1} A_{j,l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\nu h_j}, \tag{3.4.2}$$

其中

$$A_{j,l} = \frac{\sum\limits_{n\in Z} d_{nK_j-l}^2}{\left(\sum\limits_{m\in Z} d_{mK_j-l}\right)^2}. \tag{3.4.3}$$

证明　根据定义3.1.1.2知,

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1}\frac{1}{Z_l^j(0)Z_k^j(0)}\langle Z_l^j(\cdot),Z_k^j(\cdot-\nu h_j)\rangle \\ &= \frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1}\frac{\|Z_l^j\|\ \|Z_k^j\|}{Z_l^j(0)Z_k^j(0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\nu h_j}\delta_{l,k} \\ &= \frac{1}{K_j^2}\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(\frac{\|Z_l^j\|}{Z_l^j(0)}\right)^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\nu h_j} \\ &= \frac{1}{K_j^2}\sum_{l=0}^{K_j-1}A_{j,l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\nu h_j}. \end{aligned}$$

证毕.

引理 3.4.1.2 设 $\widetilde{\phi}_j(x)$为定理 3.1.4.1 中定义的对偶尺度函数,那么

$$\widetilde{\phi}_j(x) = \sum_{\nu=0}^{K_j-1} \widetilde{C}_j^{\nu}\phi_j(x - \nu h_j), \tag{3.4.4}$$

其中

$$\widetilde{C}_j^{\nu} = \sum_{l=0}^{K_j-1} (A_{j,l})^{-1}\,\omega^{-\nu l}, \tag{3.4.5}$$

这里 ω 与引理 3.1.4.1 中的一样.

证明 由引理 3.1.4.1 中 $P_j(z)$的定义知,

$$\begin{aligned} P_j(\omega^{\mu}) &= \sum_{\lambda=0}^{K_j-1} a_{\lambda}\omega^{\lambda\mu} \\ &= \sum_{\lambda=0}^{K_j-1} \frac{1}{K_j^2}\sum_{l=0}^{K_j-1} A_{j,l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\lambda h_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\mu h_j} \\ &= \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1} A_{j,l}\delta_{\mu,l} \\ &= \frac{1}{K_j}A_{j,\mu}. \end{aligned}$$

因此,由定理 3.1.4.1 中 $\widetilde{\phi}_j(x)$的定义得

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}_j(x) &= \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}(P_j(\omega^l))^{-1}\sum_{\nu=0}^{K_j-1}\omega^{-l\nu}\phi_j(x - \nu h_j) \\ &= \sum_{\nu=0}^{K_j-1} \widetilde{C}_j^{\nu}\phi_j(x - \nu h_j), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_j^{\nu} &= \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}(P_j(\omega^l))^{-1}\omega^{-l\nu} \\ &= \sum_{l=0}^{K_j-1}(A_{j,l})^{-1}\omega^{-l\nu}. \end{aligned}$$

证毕.

引理 3.4.1.3 令

$$\widetilde{\xi}_j := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix} \mid \widetilde{\phi}_j(x) \mid^2 dx, \tag{3.4.6}$$

那么

$$\widetilde{\xi}_j = \sum_{\mu=0}^{K_j-1} \frac{\widetilde{s}^j_\mu \widetilde{s}^j_{\mu+1} V^j_{\mu,\mu+1}}{\widetilde{Q}^j_\mu \widetilde{Q}^j_{\mu+1}}, \tag{3.4.7}$$

这里

$$\widetilde{Q}^j_r = \sum_{n\in Z} d^2_{nK_j-r} \quad V^j_{r,s} = \sum_{n\in Z} d_{nK_j-r} d_{nK_j-s}, \tag{3.4.8}$$

而 $\widetilde{s}^j_r$ 由(3.2.31)式给出.

证明 从(3.4.4)式得到

$$\widetilde{\xi}_j = \sum_{\nu,l=0}^{K_j-1} \widetilde{C}^\nu_j \overline{\widetilde{C}^l_j} \xi^{\nu,l}_j, \tag{3.4.9}$$

其中

$$\xi^{\nu,l}_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix}\phi_j(x-\nu h_j)\overline{\phi_j(x-lh_j)}dx.$$

对 $\xi^{\nu,l}_j$,我们有

$$\begin{aligned}\xi^{\nu,l}_j &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix}\left(\frac{1}{K_j}\sum_{\lambda=0}^{K_j-1}\frac{Z^j_\lambda(x-\nu h_j)}{Z^j_\lambda(0)}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{K_j}\sum_{\mu=0}^{K_j-1}\overline{\frac{Z^j_\mu(x-lh_j)}{Z^j_\mu(0)}}\right)dx \\ &= \sum_{\lambda,\mu=0}^{K_j-1}\frac{1}{Z^j_\lambda(0)Z^j_\mu(0)}e^{i\lambda\nu h_j - i\mu l h_j} \\ &\quad \times \sum_{n,m\in Z} d_{nK_j-\lambda}d_{mK_j-\mu}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(nK_j-mK_j-\lambda+1+\mu)x}dx.\end{aligned}$$

这样由 $V^j_{r,s}$的定义知,

$$\xi^{\nu,l}_j = \sum_{\mu=0}^{K_j-1}\frac{V^j_{\mu,\mu+1}}{Z^j_\mu(0)Z^j_{\mu+1}(0)}e^{i(\mu\nu-\mu l+\nu)h_j}. \tag{3.4.10}$$

将(3.4.10)式代入(3.4.9)式得

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\xi}_j &= K_j^2 \sum_{\mu,s=0}^{K_j-1} (A_{j,s})^{-1} \sum_{r=0}^{K_j-1} (A_{j,r})^{-1} \\
&\quad \times \delta_{r,\mu} \delta_{s,\mu+1} (Z_\mu^j(0) Z_{\mu+1}^j(0))^{-1} V_{\mu,\mu+1}^j \\
&= K_j^2 \sum_{\mu=0}^{K_j-1} (A_{j,\mu} A_{j,\mu+1} Z_\mu^j(0) Z_{\mu+1}^j(0))^{-1} V_{\mu,\mu+1}^j \\
&= \frac{1}{K_j^2} \sum_{\mu=0}^{K_j-1} Z_\mu^j(0) Z_{\mu+1}^j(0) \frac{V_{\mu,\mu+1}^j}{\widetilde{Q}_\mu^j \widetilde{Q}_{\mu+1}^j} \\
&= \sum_{\mu=0}^{K_j-1} \widetilde{s}_\mu^j \widetilde{s}_{\mu+1}^j \frac{V_{\mu,\mu+1}^j}{\widetilde{Q}_\mu^j \widetilde{Q}_{\mu+1}^j}.
\end{aligned}
$$

证毕.

引理 3.4.1.4 设

$$
\widetilde{\eta}_j := \| \widetilde{\phi}_j \|^2, \tag{3.4.11}
$$

则

$$
\widetilde{\eta}_j = \sum_{r=0}^{K_j-1} \frac{(\widetilde{s}_r^j)^2}{\widetilde{Q}_r^j}.
$$

证明 根据(3.4.4)式得到

$$
\widetilde{\eta}_j = \sum_{\nu,l=0}^{K_j-1} \widetilde{C}_j^\nu \overline{\widetilde{C}_j^l} \cdot H_j, \tag{3.4.12}
$$

其中

$$
H_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_j(x - \nu h_j) \overline{\phi_j(x - l h_j)} \mathrm{d}x.
$$

直接计算 H_j 得

$$
H_j = \sum_{\lambda,\mu=0}^{K_j-1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda\nu - \mu l) h_j}}{Z_\lambda^j(0) Z_\mu^j(0)} \sum_{m,n \in Z} d_{nK_j-\lambda} d_{mK_j-\mu} \delta_{n,m} \delta_{\mu,\lambda},
$$

即

$$
H_j = \sum_{\lambda=0}^{K_j-1} \left(\frac{1}{Z_\lambda^j(0)} \right)^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\nu - l) h_j} \widetilde{Q}_\lambda^j. \tag{3.4.13}
$$

这样,将(3.4.13)式代入(3.4.12)式中得到

$$\widetilde{\eta}_j = \sum_{r,s=0}^{K_j-1} \frac{(\widetilde{s}_r^j \widetilde{s}_s^j)^2}{K_j^2 \widetilde{Q}_r^j \widetilde{Q}_s^j} \sum_{\lambda,\nu,l=0}^{K_j-1} e^{i\nu(\lambda-r)h_j} \cdot e^{il(s-\lambda)h_j} \frac{\widetilde{Q}_\lambda^j}{(Z_\lambda^j(0))^2}$$

$$= \sum_{r=0}^{K_j-1} \frac{(\widetilde{s}_r^j)^2}{\widetilde{Q}_r^j}.$$

证毕.

3.4.2 定理 3.4.1 的证明

估计 $\mathrm{Var}(\widetilde{\phi}_j)$ 如下:

$$|\mathrm{Var}(\widetilde{\phi}_j)|$$

$$= \left| \frac{1}{\widetilde{\eta}_j} (\widetilde{\eta}_j - \widetilde{\xi}_j) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\widetilde{\eta}_j} \sum_{r=0}^{K_j-1} \frac{(\widetilde{s}_r^j)^2}{\widetilde{Q}_r^j \widetilde{Q}_{r+1}^j} \left(\widetilde{Q}_{r+1}^j - \frac{\widetilde{s}_{r+1}^j V_{r,r+1}^j}{\widetilde{s}_r^j} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\widetilde{\eta}_j} \sum_{r=0}^{K_j-1} \frac{(\widetilde{s}_r^j)^2}{\widetilde{Q}_r^j \widetilde{Q}_{r+1}^j} \left[\left(1 - \frac{\widetilde{s}_{r+1}^j}{\widetilde{s}_r^j}\right) V_{r,r+1}^j - V_{r,r+1}^j + \widetilde{Q}_{r+1}^j \right] \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\widetilde{\eta}_j} \left\{ \sum_{r=0}^{K_j-1} \left[\frac{(\widetilde{s}_r^j)^2}{\widetilde{Q}_r^j \widetilde{Q}_{r+1}^j} V_{r,r+1}^j \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{r=0}^{K_j-1} \left(1 - \frac{\widetilde{s}_{r+1}^j}{\widetilde{s}_r^j}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{\widetilde{\eta}_j} \left\{ \sum_{r=0}^{K_j-1} \frac{(\widetilde{s}_r^j)^4}{(\widetilde{Q}_r^j)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{r=0}^{K_j-1} \left(\frac{1}{\widetilde{Q}_{r+1}^j} \right)^2 \right.$$

$$\left. \times \left[\sum_n d_{nK_j-r-1} (d_{nK_j-r-1} - d_{nK_j-r}) \right]^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{\widetilde{\eta}_j} (T_1 \cdot T_2 + T_3 \cdot T_4).$$

需要分别估计 T_1, T_2, T_3 和 T_4. 首先看 T_1.

$$T_1 = \left\{ \sum_{r=0}^{K_j-1} \left[\frac{(\widetilde{s}_r^j)^2}{\widetilde{Q}_r^j \widetilde{Q}_{r+1}^j} V_{r,r+1}^j \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{r=0}^{K_j-1} \left[\frac{(\widetilde{s}_r^j)^2}{\widetilde{Q}_r^j \widetilde{Q}_{r+1}^j} (\widetilde{Q}_r^j \widetilde{Q}_{r+1}^j)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \sum_{r=0}^{K_j-1} \frac{(\widetilde{s}_r^j)^4}{\widetilde{Q}_r^j \widetilde{Q}_{r+1}^j} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{r=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \frac{(\widetilde{s}_r^j)^4}{d_{-r}^2 d_{-r-1}^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \sum_{r=-K_{j-1}}^{K_{j-1}-1} \left(\frac{\widetilde{s}_r^j}{d_{-r}}\right)^4 \left(\frac{d_{-r}}{d_{-r-1}}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C K_j^{\frac{1}{2}}, \tag{3.4.14}$$

其中最后一步使用了(3.2.38)式.

第二,我们估计 T_2.

$$T_2 = \left\{ \sum_{r=0}^{K_j-1} \left(1 - \frac{\widetilde{s}_{r+1}^j}{\widetilde{s}_r^j}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \sum_{r=0}^{K_j-1} \left| \frac{\sum_{n \in Z} (d_{nK_j-r} - d_{nK_j-r-1})}{\sum_{n \in Z} d_{nK_j-r}} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \sum_{r=0}^{K_j-1} \frac{\left| \sum_{n \in Z} d_{nK_j-r} \left(\frac{d_{nK_j-r-1}}{d_{nK_j-r}} - 1 \right) \right|^2}{\left(\sum_{n \in Z} d_{nK_j-r} \right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

由 Schwarz 不等式,我们得到

$$T_2 \leqslant \left\{ \sum_{r=0}^{K_j-1} \frac{\sum_{n \in Z} d_{nK_j-r}^2}{\left(\sum_{n \in Z} d_{nK_j-r} \right)^2} \cdot \sum_{n \in Z} \left(\frac{d_{nK_j-r-1}}{d_{nK_j-r}} - 1 \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{r=0}^{K_j-1} \sum_{n \in Z} \left(\frac{d_{nK_j-r-1}}{d_{nK_j-r}} - 1 \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

因此由条件 $\left\{1 - \frac{d_k}{d_{k+1}}\right\}_k \in l^2$ 知,

$$T_2 \leqslant C. \tag{3.4.15}$$

利用(3.2.38)式同样可得

$$T_3 = \left\{ \sum_{r=0}^{K_j - 1} \frac{(\widetilde{s}_r^j)^4}{(\widetilde{Q}_r^j)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant CK_j^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4.16}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}
T_4^2 &= \sum_{r=0}^{K_j-1} \left(\frac{1}{\widetilde{Q}_{r+1}^j} \right)^2 \Big[\sum_{n \in Z} d_{nK_j - r - 1} (d_{nK_j - r - 1} - d_{nK_j - r}) \Big]^2 \\
&\leqslant \sum_{r=0}^{K_j-1} \left(\frac{1}{\widetilde{Q}_{r+1}^j} \right)^2 \Big(\sum_{n \in Z} d_{nK_j - r - 1}^2 \Big) \\
&\quad \times \sum_{n \in Z} (d_{nK_j - r - 1} - d_{nK_j - r})^2 \\
&= \sum_{r=0}^{K_j-1} \frac{1}{\widetilde{Q}_{r+1}^j} \sum_{n \in Z} (d_{nK_j - r - 1} - d_{nK_j - r})^2 \\
&\leqslant \sum_{r=0}^{K_j-1} \frac{1}{\widetilde{Q}_{r+1}^j} \Big(\sum_{n \in Z} d_{nK_j - r - 1}^2 \Big) \sum_{n \in Z} \left\{ 1 - \frac{d_{nK_j - r}}{d_{nK_j - r - 1}} \right\}^2 \\
&= \sum_{m \in Z} \left(1 - \frac{d_{m+1}}{d_m} \right)^2 \\
&\leqslant C.
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

因此，由(3.4.14)，(3.4.15)，(3.4.16)和(3.4.17)四式知，

$$|\operatorname{Var}(\widetilde{\Phi}_j)| \leqslant C \frac{1}{\widetilde{\eta}_j} \sqrt{K_j}, \tag{3.4.18}$$

其中 C 是一个不依赖于 j 的常数.

根据引理 3.4.1.4 得到 $\widetilde{\eta}_j \geqslant K_j$. 所以由(3.4.18)式知，

$$|\operatorname{Var}(\widetilde{\Phi}_j)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{K_j}} \right) \quad (j \to \infty).$$

证毕.

§3.5 PCIW 的对偶局部性质

类似上节,本节证明定理 3.1.4.2 中定义的 $\widetilde{L}_j$ 同样具有角频局部性质.

定理 3.5.1 设 $\left\{\dfrac{d_k}{d_{k+1}}-1\right\}_k \in l^2$ 且(3.2.38)式成立.那么

$$|\operatorname{Var}(\widetilde{L}_j)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{K_j}}\right) \quad (j \to \infty). \tag{3.5.1}$$

3.5.1 引理

为了证明定理 3.5.1,需要五个辅助结果.

引理 3.5.1.1

$$\|\widetilde{L}_j\|^2 = \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}\overline{(\Gamma_j(\omega^l))^{-1}}, \tag{3.5.2}$$

其中 $\Gamma_j(z)$ 与定理 3.1.4.2 中的 $\Gamma_j(z)$ 一样.

证明 由定理 3.1.4.2 知,$\widetilde{L}_j(x)$是 $\{L_j(x),\cdots,L_j(x-(K_j-1)h_j)\}$的线性组合.因此

$$\widetilde{L}_j(x) = \sum_{\nu=0}^{K_j-1} d_{j,\nu}L_j(x-\nu h_j), \tag{3.5.3}$$

这里

$$d_{j,\nu} = \frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}(\Gamma_j(\omega^l))^{-1}\omega^{-l\nu}. \tag{3.5.4}$$

置

$$q_{j,\nu} := \langle L_j(\cdot), L_j(\cdot-\nu h_j)\rangle. \tag{3.5.5}$$

那么

$$\|\widetilde{L}_j\|^2 = \sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{K_j-1} d_{j,\nu_1}\overline{d_{j,\nu_2}}q_{j,\nu_2-\nu_1}$$

$$=\frac{1}{K_j^2}\sum_{\nu_1,\nu_2,l_1,l_2=0}^{K_j-1}(\Gamma_j(\omega^{l_1})\overline{\Gamma_j(\omega^{l_2})})^{-1}\omega^{l_2\nu_2-l_1\nu_1}q_{j,\nu_2-\nu_1}$$

$$=\frac{1}{K_j^2}\sum_{k,\nu_1,l_1,l_2=0}^{K_j-1}(\Gamma_j(\omega^{l_1})\overline{\Gamma_j(\omega^{l_2})})^{-1}\omega^{l_2(k+\nu_1)-l_1\nu_1}q_{j,k}$$

$$=\frac{1}{K_j^2}\sum_{\nu_1,l_1,l_2=0}^{K_j-1}(\Gamma_j(\omega^{l_1})\overline{\Gamma_j(\omega^{l_2})})^{-1}\omega^{(l_2-l_1)\nu_1}\Gamma_j(\omega^{l_2})$$

$$=\frac{1}{K_j}\sum_{l_1,l_2=0}^{K_j-1}(\Gamma_j(\omega^{l_1})\overline{\Gamma_j(\omega^{l_2})})^{-1}\delta_{l_1,l_2}\Gamma_j(\omega^{l_2})$$

$$=\frac{1}{K_j}\sum_{l=0}^{K_j-1}(\overline{\Gamma_j(\omega^{l})})^{-1}.$$

证毕.

对于 $\|\widetilde{L}_j\|$,还有另一种表示形式,即引理 3.5.1.2.

引理 3.5.1.2

$$\|\widetilde{L}_j\|=\left\{\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{\left|\widetilde{s}_l^{j+1}\widetilde{Q}_{K_j+l}^{j+1}+\widetilde{s}_{K_j+l}^{j+1}\widetilde{Q}_l^{j+1}\right|^2}{\widetilde{Q}_l^{j+1}\widetilde{Q}_{K_j+l}^{j+1}(\widetilde{Q}_l^{j+1}+\widetilde{Q}_{K_j+l}^{j+1})}\right\}^{\frac{1}{2}},\tag{3.5.6}$$

其中 $\widetilde{s}_r^{j+1},\widetilde{Q}_r^{j+1}$ 与引理 3.4.1.3 中的一样.

证明 因为 $\Gamma_j(z)=\sum_{\nu=0}^{K_j-1}q_{j,\nu}z^\nu$, 所以需要计算 $q_{j,\nu}$. 由 (3.1.6)式知,

$$q_{j,\nu}=\frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1}\frac{1}{R_l^j(h_{j+1})\overline{R_k^j(h_{j+1})}}I_{l,k}^{j,\nu},\tag{3.5.7}$$

其中 $I_{l,k}^{j,\nu}=\langle R_l^j(\cdot),R_k^j(\cdot-\nu h_j)\rangle$. 对于 $I_{l,k}^{j,\nu}$,由(3.1.4)式我们有

$$I_{l,k}^{j,\nu}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\left(C_l^{j+1}\widetilde{Z}_l^{j+1}(x)-C_{K_j+l}^{j+1}\widetilde{Z}_{K_j+l}^{j+1}(x)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}lh_{j+1}}$$

$$\times\left(C_k^{j+1}\overline{\widetilde{Z}_k^{j+1}(x)}-C_{K_j+k}^{j+1}\overline{\widetilde{Z}_{K_j+k}^{j+1}(x)}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(h_{j+1}+\nu h_j)}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}lh_{j+1}-\mathrm{i}k(h_{j+1}+\nu h_j)}\left\{(C_l^{j+1})^2\delta_{l,k}-C_l^{j+1}C_{K_j+k}^{j+1}\delta_{l,K_j+k}\right.$$

$$- C^{j+1}_{K_j+l}C^{j+1}_{k}\delta_{k,K_j+l} + C^{j+1}_{K_j+l}C^{j+1}_{K_j+k}\delta_{l,k}\Big\}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\nu h_j}\Big((C^{j+1}_l)^2 + (C^{j+1}_{K_j+l})^2\Big)\delta_{l,k}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\nu h_j}\Big(\| Z^{j+1}_{K_j+l}\|^2/\| Z^j_l\|^2 + \| Z^{j+1}_l\|^2/\| Z^j_l\|^2\Big)\delta_{l,k}.$$

这样,由(3.5.7)式得

$$q_{j,\nu} = \frac{1}{K_j^2}\sum_{\tilde{l}=0}^{K_j-1}\frac{1}{|R^j_{\tilde{l}}(h_{j+1})|^2}\left(\frac{\| Z^{j+1}_{K_j+\tilde{l}}\|^2}{\| Z^j_{\tilde{l}}\|^2} + \frac{\| Z^{j+1}_{\tilde{l}}\|^2}{\| Z^j_{\tilde{l}}\|^2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{l}\nu h_j}$$

$$= \frac{1}{K_j^2}\sum_{\tilde{l}=0}^{K_j-1}\frac{\| Z^{j+1}_{K_j+\tilde{l}}\|^2 + \| Z^{j+1}_{\tilde{l}}\|^2}{\Big|\| Z^{j+1}_{K_j+\tilde{l}}\|\widetilde{Z}^{j+1}_{\tilde{l}}(0) + \| Z^{j+1}_{\tilde{l}}\|\widetilde{Z}^{j+1}_{K_j+\tilde{l}}(0)\Big|^2}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{l}\nu h_j},$$

这里我们使用了下列事实:

$$R^j_l(h_{j+1}) = C^{j+1}_l\widetilde{Z}^{j+1}_l(0) + C^{j+1}_{K_j+l}\widetilde{Z}^{j+1}_{K_j+l}(0).$$

所以

$$\Gamma_j(\omega^l) = \sum_{k=0}^{K_j-1} q_{j,k}\omega^{lk} = \frac{1}{K_j^2}\sum_{\tilde{l}=0}^{K_j-1}$$

$$\times\frac{\| Z^{j+1}_{K_j+\tilde{l}}\|^2 + \| Z^{j+1}_{\tilde{l}}\|^2}{\Big|\| Z^{j+1}_{K_j+\tilde{l}}\|\widetilde{Z}^{j+1}_{\tilde{l}}(0) + \| Z^{j+1}_{\tilde{l}}\|\widetilde{Z}^{j+1}_{K_j+\tilde{l}}(0)\Big|^2}\sum_{k=0}^{K_j-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kh_j(l-\tilde{l})}$$

$$= \frac{1}{K_j}\sum_{\tilde{l}=0}^{K_j-1}\frac{\| Z^{j+1}_{K_j+\tilde{l}}\|^2 + \| Z^{j+1}_{\tilde{l}}\|^2}{\Big|\| Z^{j+1}_{K_j+\tilde{l}}\|\widetilde{Z}^{j+1}_{\tilde{l}}(0) + \| Z^{j+1}_{\tilde{l}}\|\widetilde{Z}^{j+1}_{K_j+\tilde{l}}(0)\Big|^2}\cdot\delta_{l,\tilde{l}}$$

$$= \frac{1}{K_j}\frac{\| Z^{j+1}_{K_j+l}\|^2 + \| Z^{j+1}_l\|^2}{\Big|\| Z^{j+1}_{K_j+l}\|\widetilde{Z}^{j+1}_l(0) + \| Z^{j+1}_l\|\widetilde{Z}^{j+1}_{K_j+l}(0)\Big|^2}.$$

将上式代入(3.5.2)式得

$$\|\widetilde{L}_j\|^2 = \sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{\Big|\| Z^{j+1}_{K_j+l}\|\widetilde{Z}^{j+1}_l(0) + \| Z^{j+1}_l\|\widetilde{Z}^{j+1}_{K_j+l}(0)\Big|^2}{\| Z^{j+1}_{K_j+l}\|^2 + \| Z^{j+1}_l\|^2},$$

这就是(3.5.6)式,因为 $\| Z^{j+1}_\nu\| = K_{j+1}(\widetilde{Q}^{j+1}_\nu)^{\frac{1}{2}}$, $\widetilde{Z}^{j+1}_\nu(0) = \widetilde{s}^{j+1}_\nu/(\widetilde{Q}^{j+1}_\nu)^{\frac{1}{2}}$.证毕.

引理 3.5.1.3 设 $j\geqslant 0, j\in Z$ 且(3.2.38)式成立.则

$$K_j \leqslant \| \widetilde{L}_j \|^2 \leqslant \frac{4}{C^2} K_j, \tag{3.5.8}$$

其中 C 为 (3.2.38)式中的常数 C.

证明 由(3.5.6)式知,

$$\| \widetilde{L}_j \|^2 \leqslant 2 \sum_{l=0}^{K_j-1} \frac{(\widetilde{Q}^{j+1}_{K_j+l} \widetilde{s}^{j+1}_l)^2 + (\widetilde{Q}^{j+1}_l \widetilde{s}^{j+1}_{K_j+l})^2}{\widetilde{Q}^{j+1}_l \widetilde{Q}^{j+1}_{K_j+l} (\widetilde{Q}^{j+1}_l + \widetilde{Q}^{j+1}_{K_j+l})}$$

$$\leqslant 2 \sum_{l=0}^{K_j-1} \left[\frac{(\widetilde{s}^{j+1}_l)^2}{\widetilde{Q}^{j+1}_l} + \frac{(\widetilde{s}^{j+1}_{K_j+l})^2}{\widetilde{Q}^{j+1}_{K_j+l}} \right]$$

$$\leqslant 2 \sum_{l=0}^{K_j-1} \left[\frac{(\widetilde{s}^{j+1}_l)^2}{d^2_{-l}} + \frac{(\widetilde{s}^{j+1}_{K_j+l})^2}{d^2_{-K_j-l}} \right]$$

$$\leqslant 2 \sum_{l=0}^{K_j-1} \left(\frac{1}{C^2} + \frac{1}{C^2} \right)$$

$$= \frac{4}{C^2} K_j.$$

另一方面,也从(3.5.6)式知,

$$\| \widetilde{L}_j \|^2 \geqslant \sum_{l=0}^{K_j-1} \frac{\left[\sqrt{\widetilde{Q}^{j+1}_{K_j+l}} + \sqrt{\widetilde{Q}^{j+1}_l} \, \frac{\widetilde{Q}^{j+1}_{K_j+l}}{\widetilde{Q}^{j+1}_l} \right]^2}{\widetilde{Q}^{j+1}_{K_j+l} \left[1 + \frac{\widetilde{Q}^{j+1}_{K_j+l}}{\widetilde{Q}^{j+1}_l} \right]}$$

$$\geqslant \sum_{l=0}^{K_j-1} \frac{\widetilde{Q}^{j+1}_{K_j+l} + \frac{(\widetilde{Q}^{j+1}_{K_j+l})^2}{\widetilde{Q}^{j+1}_l}}{\widetilde{Q}^{j+1}_{K_j+l} \left[1 + \frac{\widetilde{Q}^{j+1}_{K_j+l}}{\widetilde{Q}^{j+1}_l} \right]}$$

$$= K_j.$$

证毕.

令

$$\widetilde{\lambda}_j := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it} \, | \, \widetilde{L}_j(t) \, |^2 dt.$$

那么由(3.5.3)式知,

$$\widetilde{\lambda_j} = \sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{K_j-1} d_{j,\nu_1}\overline{d_{j,\nu_2}}\langle e^{i\cdot}L_j(\cdot-\nu_1 h_j),L_j(\cdot-\nu_2 h_j)\rangle.$$

这样由(3.5.4)式知，

$$\widetilde{\lambda_j} = \frac{1}{K_j^2}\sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{K_j-1}\sum_{l_1,l_2=0}^{K_j-1}(\Gamma_j(\omega^{l_1})\Gamma_j(\omega^{l_2}))^{-1}\omega^{l_2\nu_2-l_1\nu_1}p_{\nu_1,\nu_2}, \tag{3.5.9}$$

其中

$$\begin{aligned}
p_{\nu_1,\nu_2} &= \langle e^{i\cdot}L_j(\cdot-\nu_1 h_j),L_j(\cdot-\nu_2 h_j)\rangle \\
&= \frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1}\frac{1}{R_l^j(h_{j+1})\overline{R_k^j(h_{j+1})}} \\
&\quad\times\langle e^{i\cdot}R_l^j(\cdot-\nu_1 h_j),R_k^j(\cdot-\nu_2 h_j)\rangle \\
&= \frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1}\frac{1}{R_l^j(h_{j+1})\overline{R_k^j(h_{j+1})}} \\
&\quad\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ix}(C_l^{j+1}\widetilde{Z}_l^{j+1}(x-\nu_1 h_j) \\
&\quad - C_{K_j+l}^{j+1}\widetilde{Z}_{K_j+l}^{j+1}(x-\nu_1 h_j))e^{ilh_{j+1}} \\
&\quad\times(C_k^{j+1}\overline{\widetilde{Z}_k^{j+1}(x-\nu_2 h_j)} \\
&\quad - C_{K_j+k}^{j+1}\overline{\widetilde{Z}_{K_j+k}^{j+1}(x-\nu_2 h_j)})e^{-ikh_{j+1}}dx \\
&= \frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1}\frac{1}{R_l^j(h_{j+1})\overline{R_k^j(h_{j+1})}} \\
&\quad\times e^{ih_j(l\nu_1-k\nu_2)}\cdot e^{ih_{j+1}(l-k)} \\
&\quad\times(J_1+J_2+J_3+J_4)
\end{aligned}$$

而

$$J_1 = \frac{C_l^{j+1}C_k^{j+1}}{\|Z_l^{j+1}\|\,\|Z_k^{j+1}\|}\widetilde{J}_1,$$

$$J_2 = -\frac{C_l^{j+1} C_{K_j+k}^{j+1}}{\| Z_l^{j+1} \| \ \| Z_{K_j+k}^{j+1} \|} \widetilde{J}_2,$$

$$J_3 = -\frac{C_{K_j+l}^{j+1} C_k^{j+1}}{\| Z_{K_j+l}^{j+1} \| \ \| Z_k^{j+1} \|} \widetilde{J}_3, \qquad (3.5.10)$$

$$J_4 = \frac{C_{K_j+l}^{j+1} C_{K_j+k}^{j+1}}{\| Z_{K_j+l}^{j+1} \| \ \| Z_{K_j+k}^{j+1} \|} \widetilde{J}_4,$$

这里

$$\widetilde{J}_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix} Z_l^{j+1}(x) \overline{Z_k^{j+1}(x)} dx,$$

$$\widetilde{J}_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix} Z_l^{j+1}(x) \overline{Z_{K_j+k}^{j+1}(x)} dx,$$

$$\widetilde{J}_3 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix} Z_{K_j+l}^{j+1}(x) \overline{Z_k^{j+1}(x)} dx, \qquad (3.5.11)$$

$$\widetilde{J}_4 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix} Z_{K_j+l}^{j+1}(x) \overline{Z_{K_j+k}^{j+1}(x)} dx.$$

分别计算 $\widetilde{J}_1, \widetilde{J}_2, \widetilde{J}_3$ 和 $\widetilde{J}_4$ 得

$$\widetilde{J}_1 = K_{j+1}^2 \sum_{n\in Z} d_{nK_{j+1}-l}\, d_{nK_{j+1}-k}\, \delta_{l,k+1}, \qquad (3.5.12)$$

$$\widetilde{J}_2 = K_{j+1}^2 \sum_{n\in Z} d_{nK_{j+1}-l}\, d_{(n+1)K_{j+1}-k-K_j} \delta_{l,0} \delta_{k,K_j-1}, \qquad (3.5.13)$$

$$\widetilde{J}_3 = K_{j+1}^2 \sum_{n\in Z} d_{nK_{j+1}-K_j-l}\, d_{nK_{j+1}-k}\, \delta_{l,0} \delta_{k,K_j-1}, \qquad (3.5.14)$$

$$\widetilde{J}_4 = K_{j+1}^2 \sum_{n\in Z} d_{nK_{j+1}-K_j-l}\, d_{nK_{j+1}-K_j-k}\, \delta_{l,k}. \qquad (3.5.15)$$

因此,由(3.5.9)式~(3.5.15)式知,

$$\widetilde{\lambda}_j = \frac{1}{K_j^2} \sum_{l_1,l_2=0}^{K_j-1} (\Gamma_j(\omega^{l_1}) \Gamma_j(\omega^{l_2}))^{-1} \sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{K_j-1} e^{ih_j(l_2\nu_2 - l_1\nu_1)}$$

$$\times \frac{1}{K_j^2} \sum_{l,k=0}^{K_j-1} \frac{e^{ih_{j+1}(l-k)+ih_j(l\nu_1-k\nu_2)}}{R_l^j(h_{j+1}) \overline{R_k^j(h_{j+1})}} (J_1 + J_2 + J_3 + J_4)$$

$$
=\frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1}\frac{e^{ih_{j+1}(l-k)}}{R_l^j(h_{j+1})\overline{R_k^j(h_{j+1})}}
$$

$$
\times(\Gamma_j(\omega^l)\Gamma_j(\omega^k))^{-1}(J_1+J_2+J_3+J_4)
$$

$$
=E_1+E_2+E_3+E_4,
$$

其中

$$
E_\nu=\frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1}\frac{e^{ih_{j+1}(l-k)}}{R_l^j(h_{j+1})\overline{R_k^j(h_{j+1})}}(\Gamma_j(\omega^l)\Gamma_j(\omega^k))^{-1}J_\nu,
$$

$\nu=1,2,3,4.$

E_ν的计算如下：

$$
E_1=\frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1}\frac{e^{ih_{j+1}(l-k)}}{R_l^j(h_{j+1})\overline{R_k^j(h_{j+1})}}
$$

$$
\times\frac{C_l^{j+1}C_k^{j+1}}{\|Z_l^{j+1}\|\ \|Z_k^{j+1}\|}\cdot K_{j+1}^2V_{l,k}^{j+1}\delta_{l,k+1}
$$

$$
\times(\Gamma_j(\omega^l)\Gamma_j(\omega^k))^{-1}
$$

$$
=4\sum_{k=0}^{K_j-1}\frac{e^{ih_{j+1}}}{R_{k+1}^j(h_{j+1})\overline{R_k^j(h_{j+1})}}
$$

$$
\times\frac{C_{k+1}^{j+1}C_k^{j+1}V_{k+1,k}^{j+1}}{\|Z_{k+1}^{j+1}\|\ \|Z_k^{j+1}\|\Gamma_j(\omega^{k+1})\Gamma_j(\omega^k)}.
$$

令 $X_{j,k}:=(\Gamma_j(\omega^{k+1})\Gamma_j(\omega^k))^{-1}$. 则由 M_l^{j+1} 的定义(见引理 3.3.1.1)和 $V_{\nu,r}^{j+1}$的定义(见(3.4.8)式)知,

$$
E_1=\frac{1}{K_{j+1}^2}\sum_{k=0}^{K_j-1}\frac{V_{k+1,k}^{j+1}\ X_{j,k}e^{ih_{j+1}}}{\left[\widetilde{s}_{k+1}^{j+1}+(M_{K_j+k+1}^{j+1})^2\widetilde{s}_{K_j+k+1}^{j+1}\right]}
$$

$$
\times\frac{1}{\widetilde{s}_k^{j+1}+(M_{K_j+k}^{j+1})^2\widetilde{s}_{K_j+k}^{j+1}}. \tag{3.5.16}
$$

类似地有

$$
E_2=\frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1}\frac{(\Gamma_j(\omega^l)\Gamma_j(\omega^k))^{-1}}{R_l^j(h_{j+1})\overline{R_k^j(h_{j+1})}}e^{ih_{j+1}(l-k)}\cdot J_2
$$

$$=\frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1}\frac{(\Gamma_j(\omega^l)\Gamma_j(\omega^k))^{-1}}{R_l^j(h_{j+1})\overline{R_k^j(h_{j+1})}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}h_{j+1}(l-k)}$$

$$\times\left(-\frac{C_l^{j+1}C_{K_j+k}^{j+1}}{\|Z_l^{j+1}\|\ \|Z_{K_j+k}^{j+1}\|}\right)K_{j+1}^2 V_{l,k+K_j}^{j+1}\delta_{l,0}\delta_{k,K_j-1}$$

$$=4\frac{(\Gamma_j(1)\Gamma_j(\omega^{K_j-1}))^{-1}}{R_0^j(h_{j+1})\overline{R_{K_j-1}^j(h_{j+1})}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}h_{j+1}(1-K_j)}$$

$$\times\left(-\frac{C_0^{j+1}C_{K_{j+1}-1}^{j+1}}{\|Z_0^{j+1}\|\ \|Z_{K_{j+1}-1}^{j+1}\|}\right)V_{0,K_{j+1}-1}^{j+1}$$

$$=\frac{1}{K_j^2}\frac{Y_{j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}h_{j+1}}}{R_0^j(h_{j+1})\overline{R_{K_j-1}^j(h_{j+1})}}$$

$$\times\frac{C_0^{j+1}C_{K_{j+1}-1}^{j+1}V_{0,K_{j+1}-1}^{j+1}}{(\widetilde{Q}_0^{j+1}\widetilde{Q}_{K_{j+1}-1}^{j+1})^{\frac{1}{2}}},$$

其中 $Y_{j,0}:=(\Gamma_j(1)\Gamma_j(\omega^{K_j-1}))^{-1}$.根据(3.1.4)式我们有

$$E_2=\frac{Y_{j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}h_{j+1}}}{K_j^2}\cdot\frac{4\left(\frac{\widetilde{Q}_{K_j}^{j+1}}{\widetilde{Q}_0^j}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\widetilde{Q}_{K_j-1}^{j+1}}{\widetilde{Q}_{K_j-1}^j}\right)^{\frac{1}{2}}V_{0,K_{j+1}-1}^{j+1}}{\frac{K_{j+1}}{K_j(\widetilde{Q}_0^j)^{\frac{1}{2}}}\left[M_0^{j+1}\widetilde{s}_0^{j+1}+(M_0^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_j}^{j+1}\right]}$$

$$\times\frac{(\widetilde{Q}_0^{j+1}\widetilde{Q}_{K_{j+1}-1}^{j+1})^{-\frac{1}{2}}}{\frac{K_{j+1}}{K_j(\widetilde{Q}_{K_j-1}^j)^{\frac{1}{2}}}\left[M_{K_j-1}^{j+1}\widetilde{s}_{K_j-1}^{j+1}+(M_{K_j-1}^{j+1})^{-1}\widetilde{s}_{K_{j+1}-1}^{j+1}\right]},$$

即

$$E_2=\frac{Y_{j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}h_{j+1}}}{K_j^2}\cdot\frac{V_{0,K_{j+1}-1}^{j+1}}{\left[\widetilde{s}_0^{j+1}+(M_{K_j}^{j+1})^2\widetilde{s}_{K_j}^{j+1}\right]}$$

$$\times \frac{1}{\widetilde{s}^{j+1}_{K_{j+1}-1} + (M^{j+1}_{K_j-1})^2\, \widetilde{s}^{j+1}_{K_j-1}}. \qquad (3.5.17)$$

对于 E_3,应用(3.5.14)式,(3.5.11)式和(3.5.10)式得

$$E_3 = \frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1} \frac{\mathrm{e}^{ih_{j+1}(l-k)}}{R^j_l(h_{j+1})\,\overline{R^j_k(h_{j+1})}}(\Gamma_j(\omega^l)\Gamma_j(\omega^k))^{-1}$$

$$\times \left[-\frac{C^{j+1}_{K_j+l}C^{j+1}_k}{\| Z^{j+1}_{K_j+l}\|\ \| Z^{j+1}_k \|}\right]\cdot K^2_{j+1}V^{j+1}_{K_j+l,k}\ \delta_{l,0}\delta_{k,K_j-1}$$

$$= \frac{1}{K_j{}^2}\frac{\mathrm{e}^{ih_{j+1}}Y_{j,0}}{R^j_0(h_{j+1})\,\overline{R^j_{K_j-1}(h_{j+1})}}$$

$$\times \frac{C^{j+1}_{K_j}C^{j+1}_{K_j-1}}{\| Z^{j+1}_{K_j}\|\ \| Z^{j+1}_{K_j-1}\|}\cdot K^2_{j+1}V^{j+1}_{K_j,K_j-1},$$

这蕴含

$$E_3 = \frac{\mathrm{e}^{ih_{j+1}}Y_{j,0}V^{j+1}_{K_j,K_j-1}(\widetilde{Q}^{j+1}_0\widetilde{Q}^{j+1}_{K_{j+1}-1})^{\frac{1}{2}}}{K_j^2(M^{j+1}_0\,\widetilde{s}^{j+1}_0 + M^{j+1}_{K_j}\widetilde{s}^{j+1}_{K_j})}$$

$$\times \frac{1}{(M^{j+1}_{K_j-1}\,\widetilde{s}^{j+1}_{K_j-1} + M^{j+1}_{K_{j+1}-1}\,\widetilde{s}^{j+1}_{K_{j+1}-1})}$$

$$\times (\widetilde{Q}^{j+1}_{K_j}\widetilde{Q}^{j+1}_{K_j-1})^{-\frac{1}{2}}. \qquad (3.5.18)$$

同样,由(3.5.15)式,(3.5.11)式和(3.5.10)式得

$$E_4 = \frac{1}{K_j^2}\sum_{l,k=0}^{K_j-1} \frac{\mathrm{e}^{ih_{j+1}(l-k)}}{R^j_l(h_{j+1})\,\overline{R^j_k(h_{j+1})}}(\Gamma_j(\omega^l)\Gamma_j(\omega^k))^{-1}$$

$$\times \frac{C^{j+1}_{K_j+l}C^{j+1}_{K_j+k}}{\| Z^{j+1}_{K_j+l}\|\ \| Z^{j+1}_{K_j+k}\|}\cdot K^2_{j+1}V^{j+1}_{K_j+l,K_j+k}\ \delta_{l,k+1}$$

$$= 4\sum_{k=0}^{K_j-1}\frac{\mathrm{e}^{ih_{j+1}}V^{j+1}_{K_j+k+1,K_j+k}}{R^j_{k+1}(h_{j+1})\,\overline{R^j_k(h_{j+1})}}(\Gamma_j(\omega^{k+1})\Gamma_j(\omega^k))^{-1}$$

$$\times \frac{C^{j+1}_{K_j+k+1} C^{j+1}_{K_j+k}}{\| Z^{j+1}_{K_j+k+1} \| \, \| Z^{j+1}_{K_j+k} \|}$$

$$= \sum_{k=0}^{K_j-1} \frac{V^{j+1}_{K_j+k+1, K_j+k} \; X_{j,k}}{K_j^2}$$

$$\times \frac{e^{ih_{j+1}} M^{j+1}_{K_j+k+1} M^{j+1}_{K_j+k}}{\left[M^{j+1}_{k+1} \tilde{s}^{j+1}_{k+1} + M^{j+1}_{K_j+k+1} \tilde{s}^{j+1}_{K_j+k+1} \right]}$$

$$\times \frac{1}{M^{j+1}_{k} \tilde{s}^{j+1}_{k} + M^{j+1}_{K_j+k} \tilde{s}^{j+1}_{K_j+k}},$$

这里 $X_{j,k} = (\Gamma_j(\omega^{k+1}) \Gamma_j(\omega^k))^{-1}$. 因为

$$X_{j,k} = \frac{K_j^2 \left| M^{j+1}_{k+1} \tilde{s}^{j+1}_{k+1} + M^{j+1}_{K_j+k+1} \tilde{s}^{j+1}_{K_j+k+1} \right|^2}{\tilde{Q}^{j+1}_{k+1} \tilde{Q}^{j+1}_{k} (M^{j+1}_{k+1} M^{j+1}_{k})^2}$$

$$\times \left| M^{j+1}_{k} \tilde{s}^{j+1}_{k} + M^{j+1}_{K_j+k} \tilde{s}^{j+1}_{K_j+k} \right|^2, \tag{3.5.19}$$

所以

$$E_4 = \sum_{k=0}^{K_j-1} \frac{e^{ih_{j+1}} \left[M^{j+1}_{k+1} \tilde{s}^{j+1}_{k+1} + M^{j+1}_{K_j+k+1} \tilde{s}^{j+1}_{K_j+k+1} \right] M^{j+1}_{K_j+k+1}}{\tilde{Q}^{j+1}_{K_j+k} \tilde{Q}^{j+1}_{K_j+k+1}}$$

$$\times M^{j+1}_{K_j+k} V^{j+1}_{K_j+k+1, K_j+k} \left[M^{j+1}_{k} \tilde{s}^{j+1}_{k} + M^{j+1}_{K_j+k} \tilde{s}^{j+1}_{K_j+k} \right]. \tag{3.5.20}$$

将(3.5.19)式代入 (3.5.16)式得到

$$E_1 = \sum_{k=0}^{K_j-1} \frac{e^{ih_{j+1}} \left[M^{j+1}_{k+1} \tilde{s}^{j+1}_{k+1} + M^{j+1}_{K_j+k+1} \tilde{s}^{j+1}_{K_j+k+1} \right] M^{j+1}_{k+1}}{\tilde{Q}^{j+1}_{K_j+k} \tilde{Q}^{j+1}_{K_j+k+1}}$$

$$\times M^{j+1}_{k} V^{j+1}_{k+1,k} \left[M^{j+1}_{k} \tilde{s}^{j+1}_{k} + M^{j+1}_{K_j+k} \tilde{s}^{j+1}_{K_j+k} \right]. \tag{3.5.21}$$

又

$$Y_{j,0} = (\Gamma_j(1) \Gamma_j(\omega^{K_j-1}))^{-1}$$

$$= \frac{K_j^2 \left[M^{j+1}_0 \tilde{s}^{j+1}_0 + M^{j+1}_{K_j} \tilde{s}^{j+1}_{K_j} \right]^2}{\tilde{Q}^{j+1}_{K_j}}$$

$$\times \frac{\left[M_{K_j-1}^{j+1} \, \widetilde{s}_{K_j-1}^{j+1} + M_{K_{j+1}-1}^{j+1} \, \widetilde{s}_{K_{j+1}-1}^{j+1} \right]^2}{\widetilde{Q}_{K_{j+1}-1}^{j+1}},$$

所以(3.5.16)式和 (3.5.17)式分别变为

$$E_2 = \mathrm{e}^{ih_{j+1}} \frac{\left[M_0^{j+1} \, \widetilde{s}_0^{j+1} + M_{K_j}^{j+1} \widetilde{s}_{K_j}^{j+1} \right]}{\widetilde{Q}_{K_j}^{j+1}}$$

$$\times \frac{V_{0,K_{j+1}-1}^{j+1} M_0^{j+1} \, M_{K_{j+1}-1}^{j+1}}{\widetilde{Q}_{K_{j+1}-1}^{j+1}}$$

$$\times \left[M_{K_j-1}^{j+1} \, \widetilde{s}_{K_j-1}^{j+1} + M_{K_{j+1}-1}^{j+1} \, \widetilde{s}_{K_{j+1}-1}^{j+1} \right], \qquad (3.5.22)$$

$$E_3 = \mathrm{e}^{ih_{j+1}} \frac{\left[M_0^{j+1} \, \widetilde{s}_0^{j+1} + M_{K_j}^{j+1} \widetilde{s}_{K_j}^{j+1} \right] V_{K_j,K_j-1}^{j+1} M_{K_j}^{j+1} M_{K_j-1}^{j+1}}{\widetilde{Q}_{K_j}^{j+1} \widetilde{Q}_{K_{j+1}-1}^{j+1}}$$

$$\times \left[M_{K_j-1}^{j+1} \, \widetilde{s}_{K_j-1}^{j+1} + M_{K_{j+1}-1}^{j+1} \, \widetilde{s}_{K_{j+1}-1}^{j+1} \right]. \qquad (3.5.23)$$

为方便,下面我们省略上标 $j+1$,这并不引起混乱. 置

$$X_l := M_l s_l, \qquad Y_l := M_l M_{l+1} V_{l,l+1},$$

$$I_1 := \sum_{l=0}^{K_j-1} \left\{ \frac{X_l^2}{\widetilde{Q}_l + \widetilde{Q}_{l+K_j}} - \frac{X_l X_{l+1} Y_l}{\widetilde{Q}_{l+K_j} \widetilde{Q}_{l+1+K_j}} \right\}, \qquad (3.5.24)$$

$$I_2 := \sum_{l=0}^{K_j-1} \left\{ \frac{X_{l+K_j}^2}{\widetilde{Q}_l + \widetilde{Q}_{l+K_j}} - \frac{X_{l+K_j} X_{l+1+K_j} Y_l}{\widetilde{Q}_{l+K_j} \widetilde{Q}_{l+1+K_j}} \right\}, \qquad (3.5.25)$$

$$I_3 := \sum_{l=0}^{K_j-1} \left\{ \frac{X_l X_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_l + \widetilde{Q}_{l+K_j}} - \frac{X_l X_{l+1+K_j} Y_l}{\widetilde{Q}_{l+K_j} \widetilde{Q}_{l+1+K_j}} \right\}, \qquad (3.5.26)$$

$$I_4 := \sum_{l=0}^{K_j-1} \left\{ \frac{X_l X_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_l + \widetilde{Q}_{l+K_j}} - \frac{X_{l+K_j} X_{l+1} Y_l}{\widetilde{Q}_{l+K_j} \widetilde{Q}_{l+1+K_j}} \right\}. \qquad (3.5.27)$$

引理 3.5.1.4 在定理 3.5.1 的条件下,下列不等式成立:

$$| I_1 | \leqslant C K_j^{\frac{1}{2}}, \; | I_2 | \leqslant C K_j^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.5.28)$$

其中 C 为不依赖于 j 的常数.

证明 由(3.5.24)式知，

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leqslant \sum_{l=0}^{K_j-1}\left|\frac{X_l}{\widetilde{Q}_{l+K_j}}\left(X_l-\frac{X_{l+1}Y_l}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\right)\right| \\
&=\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{\widetilde{s}_l}{(\widetilde{Q}_l\widetilde{Q}_{l+K_j})^{\frac{1}{2}}}\left|M_l\widetilde{s}_l-\frac{M_{l+1}^2M_l\widetilde{s}_{l+1}V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\right| \\
&\leqslant\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{1}{C(\widetilde{Q}_{l+K_j})^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad\times\left|\widetilde{s}_l\left(\frac{\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_l}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\frac{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+1}}\left(\frac{\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_l}\right)^{\frac{1}{2}}\widetilde{s}_{l+1}V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\right| \\
&=\frac{1}{C}\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{\widetilde{s}_l}{\widetilde{Q}_l^{\frac{1}{2}}}\left|1-\frac{\widetilde{s}_{l+1}}{\widetilde{s}_l}\left(\frac{\widetilde{Q}_l}{\widetilde{Q}_{l+1}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{V_{l,l+1}}{(\widetilde{Q}_l\widetilde{Q}_{l+1})^{\frac{1}{2}}}\right|,
\end{aligned}
$$

使用 Schwarz 不等式及条件(3.2.38)式得

$$
|I_1|\leqslant\frac{K_j^{\frac{1}{2}}}{C^2}\left[\sum_{l=0}^{K_j-1}\left|1-\frac{\widetilde{s}_{l+1}}{\widetilde{s}_l}\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1}}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5.29}
$$

需要证明：存在不依赖于 j 的常数 C_1 和 C_2 使得

$$
\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{\widetilde{s}_{l+1}}{\widetilde{s}_l}\right)^2<C_1, \tag{3.5.30}
$$

$$
\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_l}\right)^2<C_2. \tag{3.5.31}
$$

事实上，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{\widetilde{s}_{l+1}}{\widetilde{s}_l}\right)^2 \\
&=\sum_{l=0}^{K_j-1}\left|\frac{\sum_{n\in Z}(d_{nK_{j+1}-l}-d_{nK_{j+1}-l-1})}{\sum_{n\in Z}d_{nK_{j+1}-l}}\right|^2
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{l=0}^{K_j-1} \frac{\left[\sum_{n\in Z} d_{nK_{j+1}-l}\left(1-\frac{d_{nK_{j+1}-l-1}}{d_{nK_{j+1}-l}}\right)\right]^2}{\left(\sum_{n\in Z} d_{nK_{j+1}-l}\right)^2}
$$

$$
\leqslant \sum_{l=0}^{K_j-1} \frac{\left[\sum_{n\in Z} d^2_{nK_{j+1}-l}\right]\left[\sum_{n\in Z}\left(1-\frac{d_{nK_{j+1}-l-1}}{d_{nK_{j+1}-l}}\right)^2\right]}{\left(\sum_{n\in Z} d_{nK_{j+1}-l}\right)^2}
$$

$$
\leqslant \sum_{l=0}^{K_j-1} \sum_{n} \left(1-\frac{d_{nK_{j+1}-l-1}}{d_{nK_{j+1}-l}}\right)^2
$$

$$
\leqslant C_1.
$$

因此(3.5.30)式成立. 对于(3.5.31)式,我们有

$$
\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1}}\right)^2
$$

$$
= \sum_{l=0}^{K_j-1} \frac{\left[\sum_{n}\left(d^2_{nK_{j+1}-l-1} - d_{nK_{j+1}-l}\, d_{nK_{j+1}-l-1}\right)\right]^2}{\widetilde{Q}^2_{l+1}}
$$

$$
= \sum_{l=0}^{K_j-1} \frac{\left[\sum_{n} d^2_{nK_{j+1}-l-1}\left(1-\frac{d_{nK_{j+1}-l}}{d_{nK_{j+1}-l-1}}\right)\right]^2}{\widetilde{Q}^2_{l+1}}
$$

$$
\leqslant \sum_{l=0}^{K_j-1} \frac{1}{\widetilde{Q}^2_{l+1}}\left[\left(\sum_{n} d^4_{nK_{j+1}-l-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n}\left(1-\frac{d_{nK_{j+1}-l}}{d_{nK_{j+1}-l-1}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2
$$

$$
\leqslant \sum_{l=0}^{K_j-1}\sum_{n}\left(1-\frac{d_{nK_{j+1}-l}}{d_{nK_{j+1}-l-1}}\right)^2 \leqslant C_2,
$$

即(3.5.31)式成立.再回到(3.5.29)式.

$$
\left[\sum_{l=0}^{K_j-1}\left|1-\frac{\widetilde{s}_{l+1}}{\widetilde{s}_l}\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1}}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}
$$

$$=\left[\sum_{l=0}^{K_j-1}\left|1-\frac{\widetilde{s}_{l+1}}{\widetilde{s}_l}+\frac{\widetilde{s}_{l+1}}{\widetilde{s}_l}\left(1-\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1}}\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left[2\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{\widetilde{s}_{l+1}}{\widetilde{s}_l}\right)^2+2\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(\frac{\widetilde{s}_{l+1}}{\widetilde{s}_l}\right)^2\left(1-\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

因此，由(3.5.30)和(3.5.31)两式及$\frac{\widetilde{s}_{l+1}}{\widetilde{s}_l}$的有界性(见引理(3.3.1.4))知，

$$\left[\sum_{l=0}^{K_j-1}\left|1-\frac{\widetilde{s}_{l+1}}{\widetilde{s}_l}\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1}}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant C. \tag{3.5.32}$$

将(3.5.29)式和(3.5.32)式结合起来便完成了(3.5.28)式中第一个不等式的证明. 下面证明第二个不等式.

$$|I_2|\leqslant\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{(M_{l+K_j}\widetilde{s}_{l+K_j})^2}{\widetilde{Q}_l+\widetilde{Q}_{l+K_j}}$$

$$\times\left[1-\frac{\widetilde{Q}_l+\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\cdot\frac{X_{l+1+K_j}Y_l}{X_{l+K_j}}\right]$$

$$\leqslant\left\{\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[\frac{(M_{l+K_j}\widetilde{s}_{l+K_j})^2}{\widetilde{Q}_l+\widetilde{Q}_{l+K_j})}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{\widetilde{Q}_l+\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\cdot\frac{X_{l+1+K_j}Y_l}{X_{l+K_j}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\Omega_1\cdot\Omega_2,$$

其中

$$\Omega_1=\left\{\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[\frac{(M_{l+K_j}\widetilde{s}_{l+K_j})^2}{\widetilde{Q}_l+\widetilde{Q}_{l+K_j})}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\Omega_2=\left[\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{\widetilde{Q}_l+\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\cdot\frac{X_{l+1+K_j}Y_l}{X_{l+K_j}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

由(3.2.38)式容易得到

$$\Omega_1 \leqslant \left[\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(\frac{\widetilde{s}^{\,2}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+K_j}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant CK_j^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.5.33)$$

类似地,我们有

$$\begin{aligned}\Omega_2 \leqslant & \left[2\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{M_{l+1+K_j}}{M_{l+K_j}}\right)^2 + 2\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(\frac{M_{l+1+K_j}}{M_{l+K_j}}\right)^2\right.\\ & \left.\times\left(1-\frac{\widetilde{s}_{l+1+K_j}}{\widetilde{s}_{l+K_j}}\frac{(\widetilde{Q}_l+\widetilde{Q}_{l+K_j})Y_l}{\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ = & \sqrt{2}(\Omega_{2,1}+\Omega_{2,2})^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \qquad (3.5.34)$$

这里

$$\Omega_{2,1} = \sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{M_{l+1+K_j}}{M_{l+K_j}}\right)^2,$$

$$\Omega_{2,2} = \sum_{l=0}^{K_j-1}\left(\frac{M_{l+1+K_j}}{M_{l+K_j}}\right)^2\left(1-\frac{\widetilde{s}_{l+1+K_j}}{\widetilde{s}_{l+K_j}}\frac{(\widetilde{Q}_l+\widetilde{Q}_{l+K_j})Y_l}{\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\right)^2.$$

由引理 3.3.1.3 知,

$$\Omega_{2,1} \leqslant \sum_{l=0}^{K_j-1}\left|1-\left(\frac{M_{l+1+K_j}}{M_{l+K_j}}\right)^2\right|^2 \leqslant C. \qquad (3.5.35)$$

估计 $\Omega_{2,2}$如下:

$$\begin{aligned}\Omega_{2,2} \leqslant & C\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{\widetilde{s}_{l+1+K_j}}{\widetilde{s}_{l+K_j}}\frac{(\widetilde{Q}_l+\widetilde{Q}_{l+K_j})M_lM_{l+1}V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\right)^2\\ = & C\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[1-\frac{\widetilde{s}_{l+1+K_j}}{\widetilde{s}_{l+K_j}}+\frac{\widetilde{s}_{l+1+K_j}}{\widetilde{s}_{l+K_j}}\right.\end{aligned}$$

$$\times\left[1-\frac{\widetilde{Q}_l+\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\frac{(\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j})^{\frac{1}{2}}}{(\widetilde{Q}_l\widetilde{Q}_{l+1})^{\frac{1}{2}}}V_{l,l+1}\right]\Bigg]^2$$

$$\leqslant 2C\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{\widetilde{s}_{l+1+K_j}}{\widetilde{s}_{l+K_j}}\right)^2$$

$$+2C\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[1-\frac{\widetilde{Q}_l+\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\frac{(\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j})^{\frac{1}{2}}}{(\widetilde{Q}_l\widetilde{Q}_{l+1})^{\frac{1}{2}}}V_{l,l+1}\right]^2.$$

置

$$\Omega_{2,2}^0:=\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{\widetilde{s}_{l+1+K_j}}{\widetilde{s}_{l+K_j}}\right)^2,$$

$$\Omega_{2,2}^1:=\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[1-\frac{\widetilde{Q}_l+\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\frac{(\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j})^{\frac{1}{2}}}{(\widetilde{Q}_l\widetilde{Q}_{l+1})^{\frac{1}{2}}}V_{l,l+1}\right]^2.$$

与(3.5.30)式一样可得

$$\Omega_{2,2}^0<C. \tag{3.5.36}$$

而

$$\Omega_{2,2}^1\leqslant\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[1-\frac{(\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j})^{\frac{1}{2}}}{(\widetilde{Q}_l\widetilde{Q}_{l+1})^{\frac{1}{2}}}\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1}}\right]^2$$

$$=\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[1-\frac{M_l}{M_{l+1}}\cdot\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1}}\right]^2$$

$$\leqslant 2\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{M_l}{M_{l+1}}\right)^2+2\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(\frac{M_l}{M_{l+1}}\right)^2\left(1-\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1}}\right)^2,$$

所以使用(3.5.33)式和(3.5.31)式的估计方法得

$$\Omega_{2,2}^1\leqslant C. \tag{3.5.37}$$

结合(3.5.33)～(3.5.37)五式，我们得到

$$\Omega_2<C. \tag{3.5.38}$$

因而从(3.5.38)式和(3.5.33)式知，(3.5.28)式中第二个不等式

得证.证毕.

引理 3.5.1.5 在定理 3.5.1 的条件下,下列不等式成立:

$$|I_3|\leqslant CK_j^{\frac{1}{2}},\ |I_4|\leqslant CK_j^{\frac{1}{2}}, \tag{3.5.39}$$

其中 C 为不依赖于 j 的常数.

证明 通过使用 X_l 和 Y_l 的定义我们有

$$|I_3|\leqslant\sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{\widetilde{s}_l\widetilde{s}_{l+K_j}}{2(\widetilde{Q}_l\widetilde{Q}_{l+K_j})^{\frac{1}{2}}}\times\left\{1-\frac{M_{l+1+K_j}\widetilde{s}_{l+1+K_j}M_lM_{l+1}V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}M_{l+K_j}\widetilde{s}_{l+K_j}}\right\}.$$

因此,由 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}|I_3|&\leqslant\left\{\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(\frac{\widetilde{s}_l\widetilde{s}_{l+K_j}}{2(\widetilde{Q}_l\widetilde{Q}_{l+K_j})^{\frac{1}{2}}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\times\left\{\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[1-\frac{\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{s}_{l+1+K_j}V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}\widetilde{Q}_l\widetilde{s}_{l+K_j}}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant CK_j^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[1-\frac{\widetilde{s}_{l+1+K_j}}{\widetilde{s}_{l+K_j}}+\frac{\widetilde{s}_{l+1+K_j}}{\widetilde{s}_{l+K_j}}\times\left(1-\frac{\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_l}\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant 2CK_j^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(1-\frac{\widetilde{s}_{l+1+K_j}}{\widetilde{s}_{l+K_j}}\right)^2+\sum_{l=0}^{K_j-1}\left(\frac{\widetilde{s}_{l+1+K_j}}{\widetilde{s}_{l+K_j}}\right)^2\left(1-\frac{\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_l}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\leqslant CK_j^{\frac{1}{2}}\left\{C + C\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[1 - \frac{\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_l}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

这样由(3.2.38)式和 (3.5.36)式得到

$$|I_3| \leqslant CK_j^{\frac{1}{2}}, \tag{3.5.40}$$

这里我们使用了下列估计：

$$\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[1 - \frac{\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_l}\right]^2$$

$$= \sum_{l=0}^{K_j-1}\left[1 - \frac{\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}} + \frac{\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\left(1 - \frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_l}\right)\right]^2$$

$$\leqslant 2\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[1 - \frac{\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\right]^2$$

$$+ 2\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[\frac{\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\right]^2\left(1 - \frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_l}\right)^2.$$

由于 $\left[\dfrac{\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\right]^2$ 有界，所以根据(3.5.31)式得

$$\sum_{l=0}^{K_j-1}\left[1 - \frac{\widetilde{Q}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_l}\right]^2 \leqslant C. \tag{3.5.41}$$

显然由(3.5.41)式推出 (3.5.40)式，因此(3.5.39)式中第一个不等式得证. 下证第二个不等式. 因为

$$|I_4| = \sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{X_l X_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_l + \widetilde{Q}_{l+K_j}}\left|1 - \frac{(\widetilde{Q}_l + \widetilde{Q}_{l+K_j})X_{l+1}Y_l}{X_l\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\right|$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{K_j-1}\frac{\widetilde{s}_l\,\widetilde{s}_{l+K_j}}{\widetilde{Q}_l + \widetilde{Q}_{l+K_j}}\left|1 - \frac{\widetilde{s}_{l+1}}{\widetilde{s}_l}\frac{\widetilde{Q}_l}{\widetilde{Q}_{l+1}}\frac{V_{l,l+1}}{\widetilde{Q}_l}\right|,$$

所以使用得到(3.5.40)式的类似方法有

$$|I_4| \leqslant CK_j^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5.42}$$

证毕.

3.5.2 定理 3.5.1 的证明

由定义知,

$$\mathrm{Var}(\widetilde{L}_j) = \frac{1}{\|\widetilde{L}_j\|^2}(\|\widetilde{L}_j\|^2 - |\widetilde{\lambda}_j|). \tag{3.5.43}$$

从(3.5.6),(3.5.20),(3.5.21),(3.5.22)和(3.5.23)五式知道,

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{L}_j\|^2 - |\widetilde{\lambda}_j| \\
&= \sum_{l=0}^{K_j-1}\left\{\frac{(\widetilde{Q}_{K_j+l}\widetilde{s}_l + \widetilde{Q}_l\widetilde{s}_{K_j+l})^2}{\widetilde{Q}_l\widetilde{Q}_{K_j+l}(\widetilde{Q}_l + \widetilde{Q}_{K_j+l})}\right. \\
&\quad - \frac{(M_{l+1}\widetilde{s}_{l+1} + M_{K_j+l+1}\widetilde{s}_{K_j+l+1})(M_l\widetilde{s}_l + M_{K_j+l}\widetilde{s}_{K_j+l})}{\widetilde{Q}_{K_j+l}\widetilde{Q}_{K_j+l+1}} \\
&\quad \left.\times (V_{l+1,l}M_lM_{l+1} + V_{K_j+l+1,K_j+l}M_{K_j+l+1}M_{K_j+l})\right\} \\
&\quad - \frac{(M_0\widetilde{s}_0 + M_{K_j}\widetilde{s}_{K_j})(M_{K_j-1}\widetilde{s}_{K_j-1} + M_{K_{j+1}+l}\widetilde{s}_{K_{j+1}+l})}{\widetilde{Q}_{K_j}\widetilde{Q}_{K_{j+1}-1}} \\
&\quad \times [V_{0,K_{j+1}-1}M_0M_{K_{j+1}-1} + V_{K_j,K_j-1}M_{K_j}M_{K_j-1}].
\end{aligned}$$

根据 X_l 和 Y_l 的定义,结合上式我们有

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{L}_j\|^2 - |\widetilde{\lambda}_j| \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{K_j-1}\left[\frac{(X_l + X_{l+K_j})^2}{\widetilde{Q}_l + \widetilde{Q}_{K_j+l}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{(X_l + X_{l+K_j})(X_{l+1} + X_{l+1+K_j})(Y_l + Y_{l+K_j})}{\widetilde{Q}_{l+K_j}\widetilde{Q}_{l+1+K_j}}\right] \\
&\leqslant I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
\end{aligned} \tag{3.5.44}$$

其中 $I_1 - I_4$ 分别为(3.5.24)~(3.5.27)四式所表示的量.因此从(3.5.44)式,引理 3.5.1.3,引理 3.5.1.4 和 引理 3.5.1.5 得

$$|\operatorname{Var}(\widetilde{L}_j)| \leqslant \frac{C}{K_j^{\frac{1}{2}}},$$

其中 C 为不依赖于 j 的常数. 故(3.5.1)式成立. 证毕.

§3.6 例　　子

在这一节里,我们将给出一些图形来说明第二节,第三节,第四节和第五节的结果. 函数

$$P_{2n}(t) = 1 + \sum_{m \neq 0} \frac{e^{imt}}{m^{2n}} = 1 + 2\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{imt}}{m^{2n}}$$

(n 是一个正整数)是满足条件

$$d_k > 0, \{d_k\}_{k \in Z} \in l^1$$

的例子,其中

$$d_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \dfrac{1}{k^{2n}}, & k \neq 0. \end{cases}$$

这些函数在文献[11]中详细讨论了. 我们必须验证它们满足

$$\left\{\frac{d_{k+1}}{d_k} - 1\right\}_{k \in Z} \in l^2$$

和(3.2.28)式.

事实上,如果我们置

$$a_k := \left\{\frac{d_{k+1}}{d_k} - 1\right\}_k,$$

那么

$$a_k = \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 \left[4n^2 + O\left(\frac{1}{k+1}\right)\right],$$

显然 $\{a_k\}_{k \in Z} \in l^2$.

再置

$$F_{l,j} := \frac{d_{-l}}{\widetilde{s}_l^j}.$$

那么对$|l|\leqslant K_{j-1}(l\neq 0)$,

$$F_{l,j}=F_{-l,j}=\left\{\sum_{\nu\neq 0}\frac{|l|^{2n}}{(\nu K_j+|l|)^{2n}}+1\right\}^{-1}.$$

又

$$F_{0,j}=\left\{\sum_{\nu\neq 0}\frac{1}{(\nu K_j)^{2n}}+1\right\}^{-1},$$

因此

$$\begin{aligned}
&\inf\{F_{l,j}\mid |l|\leqslant K_{j-1},j\geqslant 0\}\\
&=\min\{F_{K_{j-1},j},F_{0,j}\mid j\geqslant 0\}\\
&=\min\left\{\left[\sum_{\nu\neq 0}\frac{1}{(2\nu+1)^{2n}}+1\right]^{-1},\right.\\
&\qquad\left.\left[\sum_{\nu\neq 0}\frac{1}{(\nu K_j)^{2n}}+1\right]^{-1}\mid j\geqslant 0\right\}\\
&=\min\left\{\left[\sum_{\nu\neq 0}\frac{1}{(2\nu+1)^{2n}}+1\right]^{-1},\right.\\
&\qquad\left.\left[\sum_{\nu\neq 0}\frac{1}{(\nu K)^{2n}}+1\right]^{-1}\right\}\\
&>0.
\end{aligned}$$

故(3.2.28)式成立.

显然,$P_{2n}(t)$在一个周期内是次数为$2n$的多项式.对次数低的,它们是

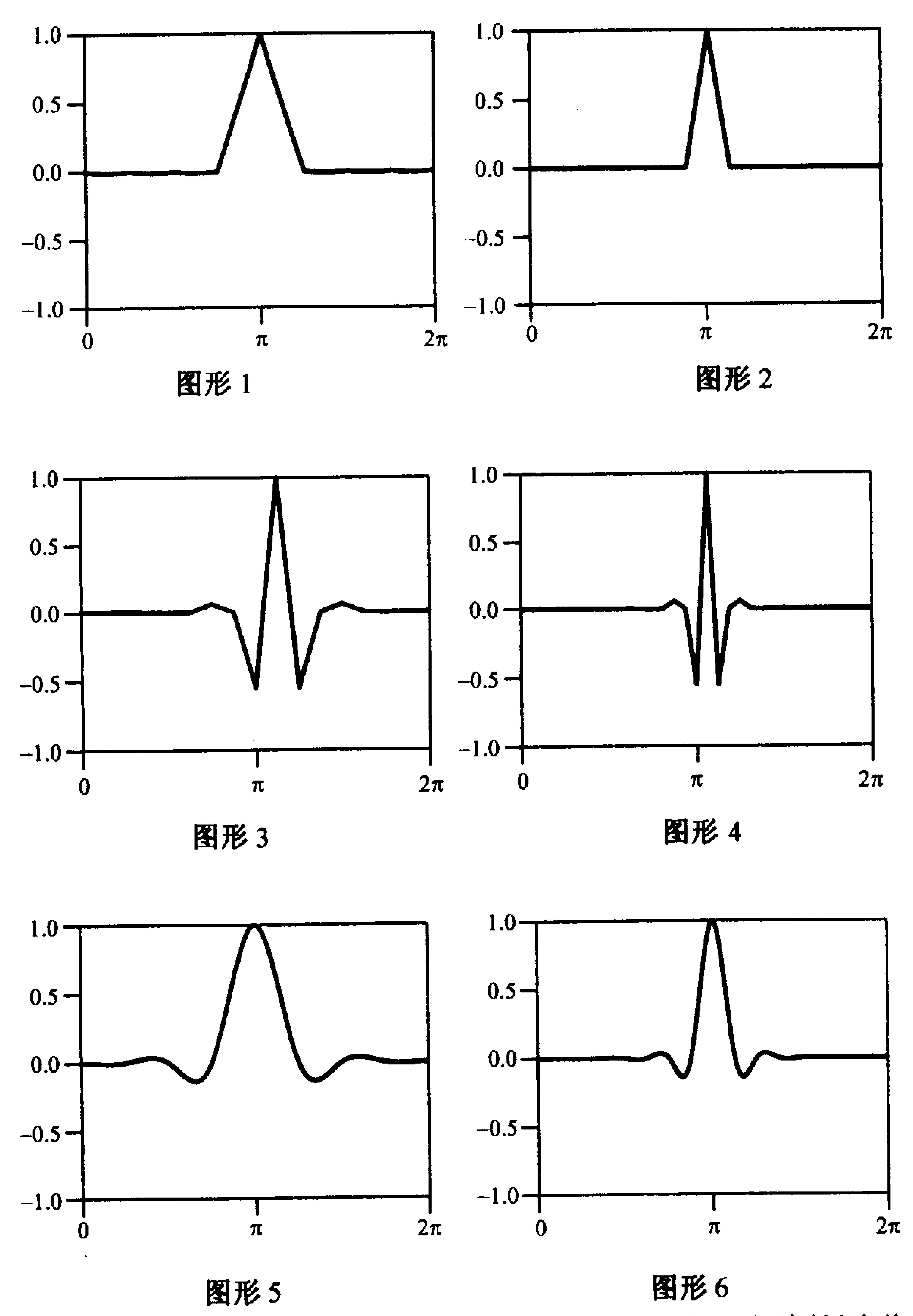
$$P_2(t)=\frac{6-\pi^2}{6}+\frac{1}{2}(t-\pi)^2,$$

$$P_4(t)=\frac{360-7\pi^4}{360}+\frac{\pi^2(t-\pi)^2}{12}-\frac{(t-\pi)^2}{24},$$

其中$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

图形1是具有16个结点由$P_2(t)$诱导出的$\phi_4(t)$的图形.图形2对应于$K_j=32$.它们均表明ϕ_4有很好的局部性质.图形3和图形4是对应于小波函数的图形.它们也具有很好的局部性质.

图形5和图形6分别是具有16结点和32结点由$P_4(t)$诱导



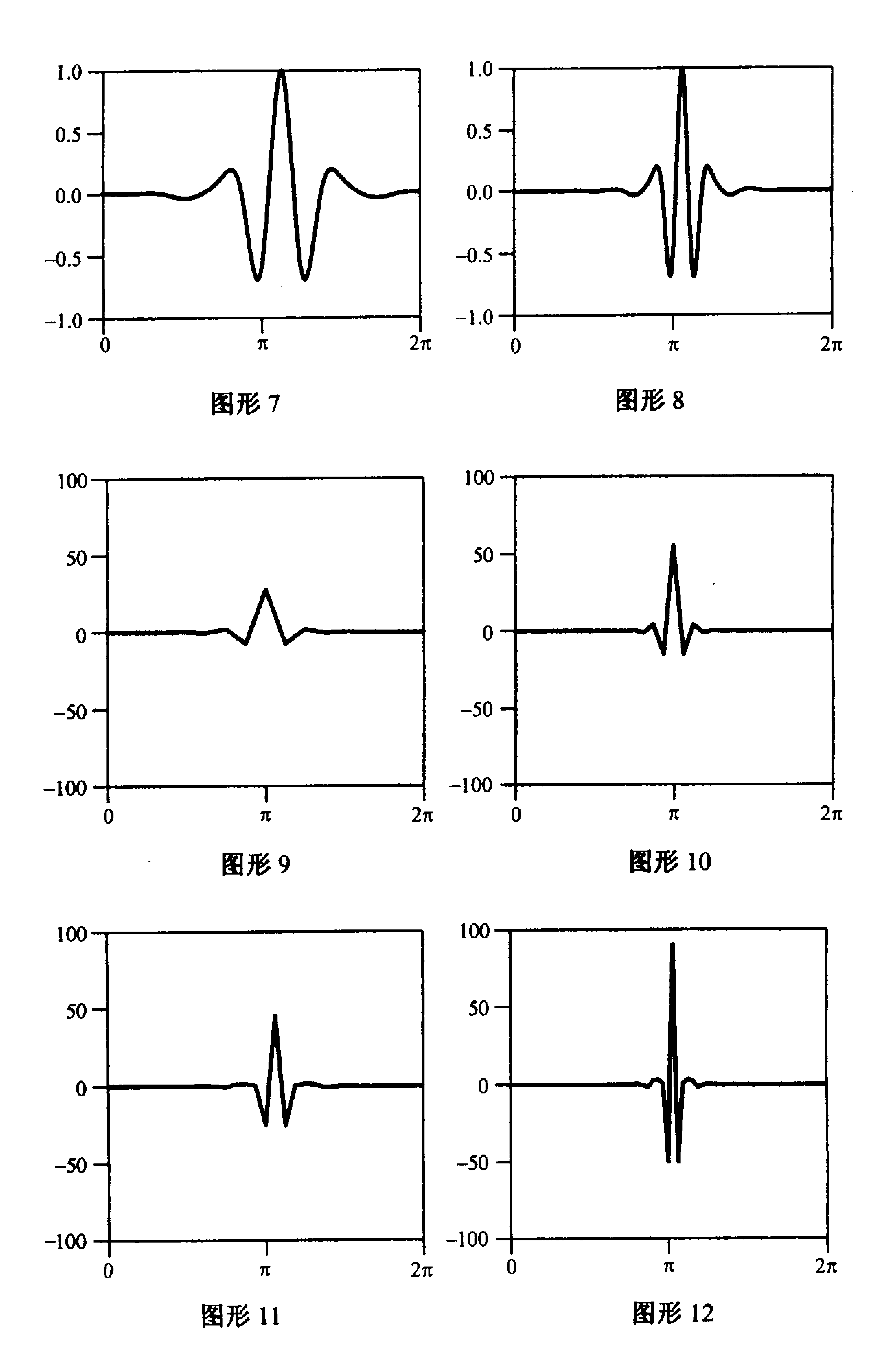
图形 1　　图形 2

图形 3　　图形 4

图形 5　　图形 6

出的尺度函数的图形. 图形 7 和图形 8 分别是对应于小波的图形.

图形 9 和图形 10 分别是具有 16 结点和 32 结点由 $P_2(t)$诱导出的 $\tilde{\phi}_4$ 和 $\tilde{\phi}_5$ 的图形. 图形 11 和图形 12 分别是对应于小波



图形 7

图形 8

图形 9

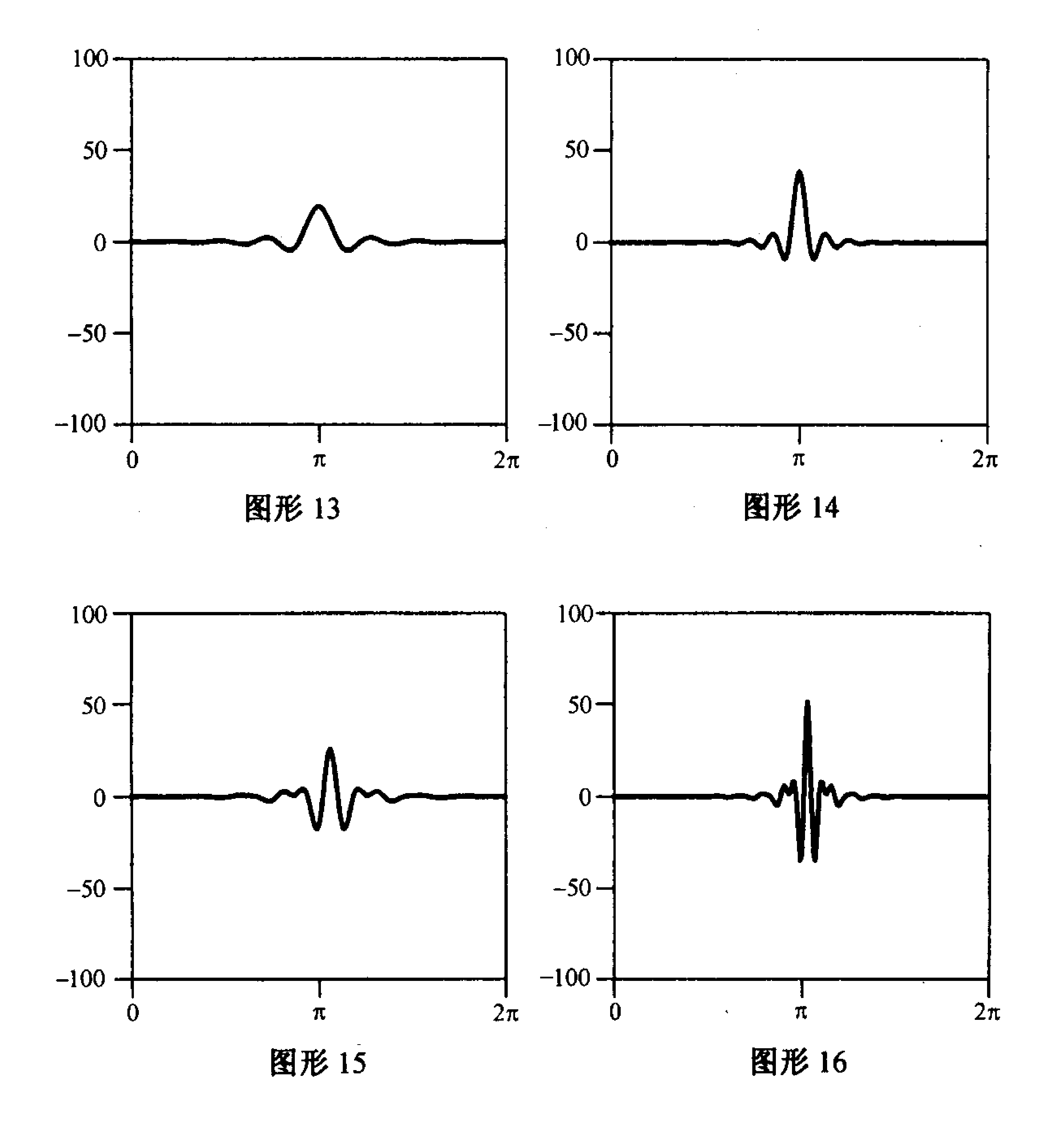
图形 10

图形 11

图形 12

$\widetilde{L}_4$ 和 $\widetilde{L}_5$ 的图形.

图形 13 和图形 14 分别是具有 16 结点和 32 结点由 $P_4(t)$诱导出的 $\widetilde{\phi}_4$ 和 $\widetilde{\phi}_5$ 的图形. 图形 15 和图形 16 分别是对应于小波 $\widetilde{L}_4$ 和 $\widetilde{L}_5$ 的图形.



图形 13

图形 14

图形 15

图形 16

第四章　第二类积分方程的拟小波算法

§4.1　引　　言

我们试图求解下述积分方程

$$u(x) = \int_0^{2\pi} u(y)(a(x-y)\log\left|2\sin\frac{x-y}{2}\right| + b(x,y))dy + g(x), x \in [0,2\pi], \quad (4.1.1)$$

其中

$$a(t) = a_0 + a_1(t)\sin^2\frac{t}{2}, \quad (4.1.2)$$

a_0 为一个常数，$b(x,y)$是一个连续函数，并且对每个变量都是周期为 2π 的周期函数，$a_1(x)$和 $g(x)$是连续周期函数. 这个方程来源于二维 Helmholtz 方程的外边值问题(参考[38],[41],[42],[40],[53]). 同时，共形映照问题也可导出这个方程，而共形映照的用途现在越来越多(见[48]).

近年来，Helmholtz 方程及其数值解法吸引了很多科学家，发表了大量的论文其中相当一部分的这类积分方程数值解法讨论了 Galerkin 逼近、配置法和类配置法的应用及其误差分析。有关详细资料，请参考[42],[52],[38]以及相关文献.

小波本来主要用于信号和图像处理，现在已被用于求解微分方程(见[30],[37])和积分方程(参考[32],[46],[31]). 最近，由 Z. Chen, C. Micchelli 和 Y. Xu(见[33])提出了一种新方法，他们利用 Petrov-Galerkin 方法结合小波对一类积分方程进行求解，计算复杂度为 $O(N\log N)$，其中 N 为未知量的个数. 而在[37]中，作者提出了一种求解 Helmholtz 方程和 Laplace 方程的多尺度算法，复杂度为 $O(N(\log N)^b)(b\geqslant 0)$. 以上方法有一个共同点：就是在

用小波基对方程进行离散化后,所得的刚度矩阵(stiffness matrix)能够近似为拟对角矩阵,从而可以找到一种快速算法.在这一章中,我们采用周期小波(见[6],[10],[50])求解方程(4.1.1).由于结合了周期拟小波、离散 Fourier 变换和样条,使得刚度矩阵的奇异部分能够对角化.与截断刚度矩阵的做法不同的是,我们采用了一种新的方法来求解所得到的线性方程组.为了得到快速算法,我们还吸收了多尺度策略(Multiresolution Strategy,见[31]).一个基于这个思路的算法已经在[35]中提出,但其复杂度为 $O(N^2)$,并不理想.我们希望尽可能地改进这个算法.本章将提出一个新的算法来求解该积分方程,而复杂度仅为 $O(N\log N)$,如果刚性矩阵已经算好,则求解方程组的复杂度为 $O(N)$.同时,由于周期拟小波是基于 B-样条的,从而使得 Galerkin 逼近拥有多项式阶的收敛速度.

§4.2 周期拟小波

令 $n\geqslant 1$ 为一个奇整数,$K\geqslant n+1$ 是一个整数,h 为一个正实数.令 $T:=Kh$,$h_m=T/K(m)$,其中 $K(m)=2^mK$.点集 $\{y_\nu^m\}$ 的定义为 $y_\nu^m=\left(\nu-\dfrac{n+1}{2}\right)h_m$.

这样,我们可以定义 B-样条如下:

$$\begin{aligned}B_j^n(x,h_m)&=(-1)^{n+1}(y_{n+1+j}^m-y_j^m)[y_j^m,\cdots,y_{j+n+1}^m]_y(x-y)_+^n\\&=\frac{1}{n!h_m^n}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}(x-y_j^m-kh_m)_+^n.\qquad(4.2.1)\end{aligned}$$

所有以 $\{\nu h_m\}_{\nu\in Z}$ 为节点的样条集合记为 $S_n(h_m)$,其中 h_m 为步长.

现在我们在 $S_n(h_m)$ 中定义一类周期样条函数. $\widetilde{S}_n(h_m):=\widetilde{S}_n(h_m,[0,T])=\{f|f$ 在区间 $[jh_m,(j+1)h_m]$ 上是次数为 n 的多项式,$j=0,1,\cdots,K(m)-1$;$f\in C^{n-1}[0,T]$;$T=K(m)h_m$,$S^{(i)}(0)=S^{(i)}(T)$,$i=0,1,\cdots,n-1\}$.

显然，$\widetilde{S}_n(h_m)$中的每个函数都能自然地周期延拓到实数轴上.我们把 $\widetilde{S}_n(h_m)$中所有函数周期延拓成的函数全体记为 $\mathring{S}_n(h_m)$.实质上，函数集 $\widetilde{S}_n(h_m)$是$\mathring{S}_n(h_m)$在区间$[0,T]$上的限制，即$\mathring{S}_n(h_m)=\{f \mid f(x)\in \widetilde{S}_n(h_m), x\in[0,T]; f(x)=f(x-\nu T), x\in[\nu T,(\nu+1)T], \nu\in Z\}$.

由已知的结论知，$\widetilde{S}_n(h_m)$的维数为 $K(m)$(参考[47]).这样，我们需要找出构成 $\widetilde{S}_n(h_m)$的基的 $K(m)$个函数.

对 $x\in[0,T]$，函数$\widetilde{B_j^n}(x,h_m):=B_j^n(x,h_m)+B_{j+K(m)}^n(x,h_m)$属于 $\widetilde{S}_n(h_m)$，$j=-n_0,\cdots,K(m)-n_0-1$，其中 $n_0=1+\left[\dfrac{n}{2}\right]$.

由此，我们容易证明下面的结论.

性质 4.2.1 函数集$\{\widetilde{B_j^n}(x,h_m)\}_{j=-n_0}^{K-n_0-1}$构成 $\widetilde{S}_n(h_m)$的一个基.

$f,g\in L^2(T)$的内积定义为$\langle f,g\rangle:=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$.

令$\mathring{B}_0^n(x,h_m)=\sum_{\nu\in Z}\widetilde{B_j^n}(x-\nu T,h_m)$.易知，$\mathring{B}_0^n$的 Fourier 级数是

$$\mathring{B}_0^n(x,h_m)=(K(m))^n\sum_{l\in Z}\left(\frac{\sin\dfrac{l\pi}{K(m)}}{l\pi}\right)^{n+1}\exp\left(\frac{i2\pi lx}{T}\right). \tag{4.2.2}$$

定义函数空间 $V_m:=\mathring{S}_n(h_m)$.由样条函数的基本性质，我们有如下结论.

性质 4.2.2 对 $m\geqslant 0$，$-n_0\leqslant j\leqslant K(m)-1-n_0$，函数$\widetilde{B_j^n}(x,h_m)$满足下面的双尺度方程

$$\widetilde{B_j^n}(x,h_m)=\sum_{-n_0-1}^{n_0+1}f_{n,\nu}\widetilde{B_{\nu+2j}^n}(x,h_{m+1}), \tag{4.2.3}$$

$$f_{n,\nu} = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\binom{n+1}{n_0+1-\nu}, & \nu = n_0 - n, \cdots, n_0+1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(4.2.4)

从性质 4.2.2,可知

$$V_m \subset V_{m+1}. \tag{4.2.5}$$

由于空间列 $\{V_m\}$ 在 $\mathring{L}_2[0,T]$ 中是稠密的(参考[47], pp307),因此

$$\overline{\bigcup_{\substack{m\in Z\\ m\geqslant 0}} V_m} = \mathring{L}_2[0,T] \tag{4.2.6}$$

定义函数 $A_\nu^{n,j}(x)$如下

$$A_\nu^{n,j}(x) := C_\nu^{n,j}\sum_{l=0}^{K(j)-1}\exp(2\pi \mathrm{i} l\nu/K(j))\,\mathring{B}_0^n(x-lh_j,h_j), \tag{4.2.7}$$

其中

$$C_\nu^{n,j} = \left[t_0 + 2\sum_{\lambda=1}^{n} t_\lambda \cos(\lambda\nu h_j)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$t_\lambda = B_0^{2n+1}(\lambda,1), B_0^{2n+1}(\cdot,1) \in S_{2n+1}(1). \tag{4.2.8}$$

函数 $A_\nu^{n,m}(x)$的 Fourier 级数为

$$A_\nu^{n,m}(x) = C_\nu^{n,m}(K(m))^{n+1}\sum_{\lambda\in Z}\left(\frac{\sin\frac{\nu\pi}{K(m)}}{(\nu+\lambda K(m))\pi}\right)^{n+1}$$

$$\times \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}(\nu+\lambda K(m))x}{T}\right). \tag{4.2.9}$$

从 $A_\nu^{n,m}(x)$的 Fourier 展开可得如下结论.

引理 4.2.1 函数集$\{A_\nu^{n,m}(x)\}_{\nu=0}^{K(m)-1}$是空间 $V_m = \mathring{S}_n(h_m)$ 的一个标准正交基,即

$$\langle A_{\nu_1}^{n,m}(x), A_{\nu_2}^{n,m}(x)\rangle = \delta_{\nu_1,\nu_2} \tag{4.2.10}$$

其中 $0\leqslant\nu_1,\nu_2\leqslant K(m)-1$.

我们还可以得到 $A_\nu^{n,m}(x)$的双尺度方程.其结果为

定理 4.2.1 $A_\nu^{n,m}(x)$满足如下双尺度方程:

$$A_\nu^{n,m}(x)=a_\nu^{n,m+1}A_\nu^{n,m+1}(x)+b_\nu^{n,m+1}A_{\nu+K(m)}^{n,m+1}(x), \tag{4.2.11}$$

其中 $a_\nu^{n,m+1}$和$b_\nu^{n,m+1}$为常数,

$$a_\nu^{n,m+1}=C_\nu^{n,m}\left(\cos\frac{\nu\pi}{K(m+1)}\right)^{n+1}/C_\nu^{n,m+1}, \tag{4.2.12}$$

$$b_\nu^{n,m+1}=C_\nu^{n,m}\left(\sin\frac{\nu\pi}{K(m+1)}\right)^{n+1}/C_{\nu+K(m)}^{n,m+1}, \tag{4.2.13}$$

这里 $0\leqslant\nu\leqslant K(m)-1$,其中 $C_\nu^{n,m}$如(4.2.8)式所定义.

证明 由(4.2.7)式和(4.2.3)式,我们有

$$\begin{aligned}A_\nu^{n,m}(x)&=C_\nu^{n,m}\sum_{l=0}^{K(m)-1}\exp(2\pi\mathrm{i}l\nu/K(m))\,\mathring{B}_0^n(x-lh_m,h_m)\\&=C_\nu^{n,m}\sum_{l=0}^{K(m)-1}\exp(2\pi\mathrm{i}l\nu/K(m))\\&\quad\times\sum_{k=-n_0-1}^{n_0+1}f_{n,k}\mathring{B}_0^n(x-(k+2l)h_{m+1},h_{m+1}).\end{aligned}$$

再由(4.2.7)式可得

$$\begin{aligned}&\mathring{B}_0^n(x-(k+2l)h_{m+1})\\&=\sum_{\mu=0}^{K(m+1)-1}d_\mu\exp\left(\frac{-2\pi\mathrm{i}(k+2l)\mu}{K(m+1)}\right)A_\mu^{n,m+1}(x),\end{aligned}$$

其中 $d_\mu=1/\left(C_\mu^{n,m+1}\cdot K(m+1)\right)$.将上式代入前式得到

$$\begin{aligned}A_\nu^{n,m}(x)&=C_\nu^{n,m}\sum_{l=0}^{K(m)-1}\exp(2\pi\mathrm{i}l\nu/K(m))\sum_{k=-n_0-1}^{n_0+1}f_{n,k}\\&\quad\times\sum_{\mu=0}^{K(m+1)-1}d_\mu\exp\left(\frac{-2\pi\mathrm{i}(k+2l)\mu}{K(m+1)}\right)A_\mu^{n,m+1}(x).\end{aligned}$$

注意到当 $\mu=\nu \bmod K(m)$时，$\sum_{l=0}^{K(m)-1} \exp(2\pi i l(\mu-\nu)/K(m)) = K(m)$，其他为 0，所以交换前式的求和次序得到

$$
\begin{aligned}
A_\nu^{n,m}(x) &= K(m)C_\nu^{n,m}\sum_{k=-n_0-1}^{n_0+1} f_{n,k}\exp\left(\frac{-2\pi i k\nu}{K(m+1)}\right)d_\nu A_\nu^{n,m+1}(x) \\
&\quad + K(m)C_\nu^{n,m}\sum_{k=-n_0-1}^{n_0+1} f_{n,k}\exp\left(\frac{-2\pi i k(\nu+K(m))}{K(m+1)}\right) \\
&\quad \times d_{\nu+K(m)}A_{\nu+K(m)}^{n,m+1}(x).
\end{aligned}
$$

利用(4.2.4)式，直接计算得到

$$
A_\nu^{n,m}(x) = a_\nu^{n,m+1}A_\nu^{n,m+1}(x) + b_\nu^{n,m+1}A_{\nu+K(m)}^{n,m+1}(x).
$$

定理证毕.

下面，我们将要定义一些和 $A_\nu^{n,m}$ 相对应的函数，这些函数就是我们所要找的小波函数. 令

$$
D_\nu^{n,m}(x) := b_\nu^{n,m+1}A_\nu^{n,m+1}(x) - a_\nu^{n,m+1}A_{\nu+K(m)}^{n,m+1}(x), \tag{4.2.14}
$$

$\nu=0,\cdots,K(m)-1$. 这些函数有如下性质:

$$
\langle D_{\nu_1}^{n,m}, D_{\nu_2}^{n,m}\rangle = \delta_{\nu_1,\nu_2}, \quad 0\leqslant \nu_1,\nu_2 \leqslant K(m)-1 \tag{4.2.15}
$$

$$
D_\nu^{n,m} \in V_{m+1}, \quad 0\leqslant \nu \leqslant K(m)-1, \tag{4.2.16}
$$

$$
\langle D_{\nu_1}^{n,m}, A_{\nu_2}^{n,m}\rangle = 0, \quad 0\leqslant \nu_1,\nu_2 \leqslant K(m)-1. \tag{4.2.17}
$$

设

$$
W_m := \mathrm{Span}\{D_\nu^{n,m} \mid \nu = 0,\cdots,K(m)-1\}, \tag{4.2.18}
$$

则我们可以得到如下结论.

定理 4.2.2 函数集$\{D_\nu^{n,m}\}_{\nu=0}^{K(m)-1}$是空间 W_m 的一个标准正交基，并且 $V_{m+1}=V_m \oplus W_m$.

我们称 $A_{\nu}^{n,m}$ 为父拟小波(father quasi-wavelet)；$D_{\nu}^{n,m}$ 则称为母拟小波(mother quasi-wavelet). 我们之所以在小波之前加上"拟"字,是因为这类小波不同于传统的小波.

设 P_m, Q_m 是分别由$\mathring{L}_2[0,T]$映射到 V_m 和 W_m 上的正交投影. 令

$$\alpha_{\nu}^{m} := \langle f, A_{\nu}^{n,m} \rangle, \beta_{\nu}^{m} := \langle f, D_{\nu}^{n,m} \rangle. \qquad (4.2.19)$$

那么我们有如下结论.

定理 4.2.3 由(4.2.19)式定义的系数$\{\alpha_{\nu}^{m}\}$和$\{\beta_{\nu}^{m}\}$,我们可以得到如下分解公式:

$$\alpha_{\nu}^{m} = a_{\nu}^{n,m+1}\alpha_{\nu}^{m+1} + b_{\nu}^{n,m+1}\alpha_{\nu+K(m)}^{m+1}, \qquad (4.2.20)$$

$$\beta_{\nu}^{m} = b_{\nu}^{n,m+1}\alpha_{\nu}^{m+1} - a_{\nu}^{n,m+1}\alpha_{\nu+K(m)}^{m+1}, \qquad (4.2.21)$$

而重构公式则是:

$$\alpha_{\nu}^{m+1} = a_{\nu}^{n,m+1}\alpha_{\nu}^{m} + b_{\nu}^{n,m+1}\beta_{\nu}^{m}, \qquad (4.2.22)$$

$$\alpha_{\nu+K(m)}^{m+1} = b_{\nu}^{n,m+1}\alpha_{\nu}^{m} - a_{\nu}^{n,m+1}\beta_{\nu}^{m}, \qquad (4.2.23)$$

其中 $\nu = 0, \cdots, K(m) - 1$.

记 $\alpha^{m} := (\alpha_{0}^{m}, \cdots, \alpha_{K(m)-1}^{m})^{\mathrm{T}}, \beta^{m} := (\beta_{0}^{m}, \cdots, \beta_{K(m)-1}^{m})^{\mathrm{T}}$,其中记号$(\cdot)^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵$(\cdot)$的转置. 为了叙述方便,我们采用下面的记号:

定义

$$\widetilde{W}_m := \begin{pmatrix} a_0^{n,m} & 0 & \cdots & b_0^{n,m} & 0 & \cdots \\ 0 & a_1^{n,m} & \cdots & 0 & b_1^{n,m} & \cdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_0^{n,m} & 0 & \cdots & -a_0^{n,m} & 0 & \cdots \\ 0 & b_1^{n,m} & \cdots & 0 & -a_1^{n,m} & \cdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

(4.2.24)

那么 $\widetilde{W}_m$ 是一个$K(m)\times K(m)$矩阵.另记 $\widetilde{W}_m=(\omega_{\mu,\nu})$,其中矩阵中位置$(\mu+1,\nu+1)$处的元素为 $\omega_{\mu,\nu}$.我们可以写出矩阵 $\widetilde{W}_m$ 如下:对 $0\leqslant\mu<K(m-1)$,令

$$\omega_{\mu,\nu}=\begin{cases}a_{\mu}^{n,m}, & \nu=\mu,\\ b_{\mu}^{n,m}, & \nu=\mu+K(m-1),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

以及

$$\omega_{\mu+K(m-1),\nu}=\begin{cases}b_{\mu}^{n,m}, & \nu=\mu,\\ -a_{\mu}^{n,m}, & \nu=\mu+K(m-1),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

从以上定义可以看出,矩阵 $\widetilde{W}_m$ 非零元素的个数不超过$2K(m)$.将矩阵 $\widetilde{W}_m$ 的上半部分记为L_m,下半部分记为 H_m,即

$$\widetilde{W}_m=\begin{pmatrix}L_m\\ H_m\end{pmatrix}.$$

那么公式(4.2.20)和(4.2.21)可改写为

$$\begin{pmatrix}\alpha^m\\ \beta^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_{m+1}\\ H_{m+1}\end{pmatrix}\alpha^{m+1}. \tag{4.2.25}$$

同样,(4.2.22)式和(4.2.23)式等价于

$$\alpha^{m+1}=(L_{m+1}^{\mathrm{T}},H_{m+1}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\alpha^m\\ \beta^m\end{pmatrix}. \tag{4.2.26}$$

对 $C_{\nu}^{n,m}$,我们有如下估计,这对后面的误差分析将会有帮助.

引理 4.2.2 $C_{\nu}^{n,m}$满足下面的不等式:

$$1\leqslant\left|C_{\nu}^{n,m}\right|\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1},\quad \nu=0,\cdots,K(m)-1. \tag{4.2.27}$$

证明 令

$$E_{\nu}=\sum_{l=0}^{K(m)-1}\exp(2\pi\mathrm{i}l\nu/K(m))\,\mathring{B}_0^{2n+1}(lK(m),h_m). \tag{4.2.28}$$

那么从(4.2.8)式可得,对 $\nu=0,1,\cdots,K(m)-1, C_\nu^{n,m}=|E_\nu|^{-\frac{1}{2}}$ 成立.

现在我们估计. $|E_\nu|$ 由于$\mathring{B}_0^{2n+1}(lK(j),h_j)\geqslant 0$,因此从(4.2.28)式可得

$$\max_{0\leqslant\nu\leqslant K(j)-1}|E_\nu|\leqslant|E_0|=\sum_{l=0}^{K(m)-1}\mathring{B}_0^{2n+1}(lK(m),h_m)=1.$$

对于下界,我们将 E_ν 改写成另一种形式:

$$E_\nu=K(m)^{2n+2}\sum_{\lambda\in Z}\left(\frac{\sin\dfrac{\nu\pi}{K(m)}}{(\nu+\lambda K(m))\pi}\right)^{2n+2}$$

$$\geqslant K(m)^{2n+2}\left(\frac{\sin\dfrac{\nu\pi}{K(m)}}{\nu\pi}\right)^{2n+2}\geqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+2}.$$

定理证毕.

在下面的定理中,我们估计了误差 $\|(f-P_mf)^{(s)}\|_q$.

定理 4.2.4 任给 $f\in\mathring{C}^n[0,T]$,

$$\|(f-P_mf)^{(s)}\|_\infty\leqslant A(n,s)h_m^{n-s}\omega\left(f^{(n)};\frac{m+1}{2}h_m\right),$$

其中 $A(n,s)$是只依赖于 n 和 s 的常数,ω 是周期连续模.

定理 4.2.5 设 $1\leqslant p,q<\infty$,则存在一个常数 $B(n,s,p,q)$使得对任给 $f\in L_p^{n+1}[0,T]$,

$$\|(f-P_mf)^{(s)}\|_{\mathring{L}_q}\leqslant B(n,s,p,q)h^{n+1-s-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\|f^{(n+1)}\|_{\mathring{L}_p}. \tag{4.2.29}$$

上述两个定理的证明可采用由 C. de Boor 和 C. J. Fix 在[33]中采用的拟插值算子方法证明,证明并不复杂.这里我们省略它.

众所周知,B-样条能够很好的逼近光滑函数,但遗憾的是,我们所考虑的核函数不是这样.我们需要为这个核函数建立单独的逼近估计.下面的定理就给出了关于函数 $\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$ 在空间 V_m

中的逼近阶.虽然估计是粗略的,但这里的估计方法将在后面算法的误差估计中使用.

定理 4.2.6 令 $f(x) = -2\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$,那么

$$\| f - P_m f \|_{L_2} \leqslant C_1 h_m^{\frac{1}{2}}, \tag{4.2.30}$$

其中 C_1 是不依赖于 m 的一个常数.

证明 由函数 $A_\nu^{n,m}$ 的定义可以得到

$$A_\nu^{n,m}(x) = C_\nu^m (K(m))^{n+1} \sum_{\lambda \in Z} \left(\frac{\sin \frac{\nu\pi}{K(m)}}{(\nu + \lambda K(m))\pi} \right)^{n+1} \times \exp(\mathrm{i}(\nu + \lambda K(m))x). \tag{4.2.31}$$

另外,我们还有

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathbf{Z}, \lambda \neq 0} \frac{1}{|\lambda|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}. \tag{4.2.32}$$

因此

$$\langle f, A_\nu^{n,m} \rangle = C_\nu^{n,m} (K(m))^{n+1} \sum_{\lambda \in \mathbf{Z}} \left(\frac{\sin \frac{\nu\pi}{K(m)}}{(\nu + \lambda K(m))\pi} \right)^{n+1} \times \frac{1}{\nu + \lambda K(m)}. \tag{4.2.33}$$

利用(4.2.12)式,(4.2.13)式及不等式 $|\sin(x)| \leqslant |x|$,我们很容易看出,对任给 $0 < j < K(m)$,有

$$\left| a_\nu^{n,m+1} \right| \leqslant C_3 \frac{K(m) - \nu}{K(m+1)}, \tag{4.2.34}$$

$$\left| b_\nu^{n,m+1} \right| \leqslant C_4 \frac{\nu}{K(m+1)}. \tag{4.2.35}$$

从(4.2.27)式和(4.2.33)式,经过直接计算可得

$$\left| \langle f, A_\nu^{n,m+1} \rangle \right| \leqslant C_0 \left(\frac{1}{\nu} + (K(m))^{n+2} \sum_{\lambda \in \mathbf{Z}, \lambda \neq 0} \frac{1}{(\nu + \lambda K(m))^{n+2}} \right) \leqslant C_5 \frac{1}{\nu}. \tag{4.2.36}$$

类似地,我们有

$$\left|\langle f, A^{n,m+1}_{\nu+K(m)}\rangle\right| \leqslant C_6 \frac{1}{K(m)-\nu}. \qquad (4.2.37)$$

由于

$$\begin{aligned}\langle f, D^{n,m}_{\nu}\rangle &= \langle f, b^{n,m+1}_{\nu} A^{n,m+1}_{\nu} - a^{n,m+1}_{\nu} A^{n,m+1}_{\nu+K(m)}\rangle \\ &= b^{n,m+1}_{\nu}\langle f, A^{n,m+1}_{\nu}\rangle - a^{n,m+1}_{\nu}\langle f, A^{n,m+1}_{\nu+K(m)}\rangle,\end{aligned}$$

所以

$$\left|\langle f, D^{n,m}_{\nu}\rangle\right| \leqslant C_7 \frac{1}{K(m+1)}. \qquad (4.2.38)$$

值得注意的是,上式对 $j=0$ 也是正确的,这一点可以直接计算得到.

这样,我们有

$$\begin{aligned}\| f - P_m f \|^2 &= \sum_{l \geqslant m} \sum_{\nu=0}^{K(l)-1} \left|\langle f, D^{n,l}_{\nu}\rangle\right|^2 \\ &\leqslant \sum_{l \geqslant m} C_7^2 \frac{K_l}{K_{l+1}^2} \leqslant C \cdot \frac{1}{K(m)}.\end{aligned}$$

其中 $C_1, \cdots, C_7$ 都是依赖于 ν 和 m 的常数. 证毕.

§4.3 求解积分方程的拟小波算法

4.3.1 离散化:投影到 V_m

从这一节开始,我们开始讨论求解方程(4.1.1)的方法. 将(4.1.1)式改写为算子方式:

$$u = Tu + g. \qquad (4.3.1)$$

求积分方程数值解,首先是要对方程进行离散化,得到一个线性方程组,然后才对线性方程组进行求解. Galerkin 逼近是常用的方法. 令 P_m 是由 $\mathring{L}_2[0,2\pi]$ 到 V_m 上的投影算子,那么下面的新方程是方程(4.3.1)的一个逼近:

$$u_m = P_m T u_m + P_m g, \qquad (4.3.2)$$

其中 $u_m \in V_m$.

由于$\{A_j^{n,m}\}$是 V_m 的一个标准正交基,所以可设

$$u_m = \sum_{j=0}^{K(m)-1} s_j^m A_j^{n,m}, \quad P_m g = \sum_{j=0}^{K(m)-1} g_j^m A_j^{n,m}. \qquad (4.3.3)$$

将(4.3.3)式代入(4.3.2)式得

$$s_j^m = \sum_{k=0}^{K(m)-1} \beta_{jk} s_k^m + g_j^m \quad (0 \leqslant j \leqslant K(m)-1), \qquad (4.3.4)$$

其中

$$\beta_{jk}^m = \langle TA_k^{n,m}, A_j^{n,m} \rangle. \qquad (4.3.5)$$

那么,我们现在的任务是求解方程组(4.3.4).记

$$\theta(x-y) := a(x-y)\log\left|2\sin\frac{x-y}{2}\right|. \qquad (4.3.6)$$

对 $0 \leqslant j, k < K(m)$,定义

$$e_{jk}^m := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta(x-y) A_k^{n,m}(y) \overline{A_j^{n,m}(x)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$f_{jk}^m := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(x,y) A_k^{n,m}(y) \overline{A_j^{n,m}(x)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

那么

$$\beta_{jk}^m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (\theta(x-y) + b(x,y)) A_k^{n,m}(y) \overline{A_j^{n,m}(x)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= e_{jk}^m + f_{jk}^m \quad (0 \leqslant j, k \leqslant K(m)-1). \qquad (4.3.7)$$

为简便起见,我们采用另外的记号.记

$$E^m := (e_{jk}^m), \quad F^m := (f_{jk}^m),$$

$$s^m := (s_j^m), \quad g^m := (g_j^m), \qquad (4.3.8)$$

其中 $0 \leqslant j, k \leqslant K(m)-1$.也就是说,$E^m$ 和 F^m 是 $K(m) \times K(m)$ 矩阵,s^m 和 g^m 则是长度为 $K(m)$ 的列向量.采用上述记号,可知(4.3.4)式等价于如下形式

$$s^m = (E^m + F^m) s^m + g^m. \qquad (4.3.9)$$

4.3.2 线性方程组的分裂

在进一步阐述算法之前,我们先分析一下矩阵 E^m 的性质.这就是下面的结论,其证明并不复杂,详细证明可参考文献[35],这里我们只给出一个简要的证明.

定理 4.3.2.1

$$E^m = \operatorname{diag}(e_{00}^m, \cdots, e_{K(m)-1,K(m)-1}^m). \tag{4.3.10}$$

证明 设

$$A_k^{n,m}(x) = C_k^m \sum_{l\in \mathbf{Z}} q_{k+lK(m)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+lK(m))x},$$

$$\theta(x) = \sum_{k\in \mathbf{Z}} p_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

其中前式可由 $A_k^{n,m}$ 的定义直接证明.这样,我们有

$$\begin{aligned}
e_{\mu,\nu}^m &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\theta(y-t)A_\nu^{n,m}(t)\bar{A}_\mu^{n,m}(y)\mathrm{d}t\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}C_\mu^m C_\nu^m \sum_{k\in \mathbf{Z}} p_k \sum_{\lambda_1,\lambda_2\in \mathbf{Z}} q_{\mu+\lambda_1 K(m)}\overline{q_{\nu+\lambda_2 K(m)}}(2\pi)^2 \\
&\quad \times \delta_{k,\mu+\lambda_2 K(m)}\delta_{k,\nu+\lambda_1 K(m)} \\
&= \Big(2\pi(C_\mu^m)^2 \cdot \sum_{\lambda\in \mathbf{Z}} p_{\mu+\lambda K(m)}\left|q_{\mu+\lambda K(m)}\right|^2\Big)\delta_{\nu,\mu} = e_{\mu,\mu}^m\delta_{\nu,\mu}.
\end{aligned}$$

定理得证.

令 $\widetilde{W}_m$ 如(4.2.24)式所定义.由前面的结论可以得到

$$\widetilde{W}_m^T\widetilde{W}_m = H_m^T H_m + L_m^T L_m = I_m \tag{4.3.11}$$

以及

$$H_m H_m^T = I_{m-1}, \quad L_m L_m^T = I_{m-1}, \tag{4.3.12}$$

其中 I_m 是$K(m)\times K(m)$单位阵.

用 $\widetilde{W}_m$ 同时作用于(4.3.9)两侧,然后分裂成如下两个方程:

$$\begin{aligned}
L_m s^m &= L_m(E^m + F^m)s^m + L_m g^m \\
&= L_m(E^m + F^m)L_m^T L_m s^m
\end{aligned}$$

$$+ L_m(E^m + F^m)H_m^T H_m s^m + L_m g^m, \qquad (4.3.13)$$

以及

$$H_m s^m = H_m(E^m + F^m)L_m^T L_m s^m$$

$$+ H_m(E^m + F^m)H_m^T H_m s^m + H_m g^m. \qquad (4.3.14)$$

记

$$L_m s^m = s_{m-1}^m, \quad H_m s^m = d_{m-1}^m, \qquad (4.3.15)$$

$$L_m g^m = g_s^{m-1}, \quad H_m g^m = g_d^{m-1}, \qquad (4.3.16)$$

$$L_m E^m L_m^T = E_{00}^{m-1}, \quad L_m E^m H_m^T = E_{01}^{m-1}, \qquad (4.3.17)$$

$$H_m E^m L_m^T = E_{10}^{m-1}, \quad H_m E^m H_m^T = E_{11}^{m-1}, \qquad (4.3.18)$$

$$L_m F^m L_m^T = F_{00}^{m-1}, \quad L_m F^m H_m^T = F_{01}^{m-1}, \qquad (4.3.19)$$

$$H_m F^m L_m^T = F_{10}^{m-1}, \quad H_m F^m H_m^T = F_{11}^{m-1}. \qquad (4.3.20)$$

那么线性方程组(4.3.13)式和(4.3.14)式可以用上述记号改写为

$$s_{m-1}^m = (E_{00}^{m-1} + F_{00}^{m-1})s_{m-1}^m$$

$$+ (E_{01}^{m-1} + F_{01}^{m-1})d_{m-1}^m + g_s^{m-1}, \qquad (4.3.21)$$

$$d_{m-1}^m = (E_{10}^{m-1} + F_{10}^{m-1})s_{m-1}^m$$

$$+ (E_{11}^{m-1} + F_{11}^{m-1})d_{m-1}^m + g_d^{m-1}. \qquad (4.3.22)$$

4.3.3 近似多尺度策略

我们希望采用多尺度策略(Multiscale Strategy[31])的思想来求解方程(4.3.9).其思路如下:如果我们从方程组(4.3.21)式和(4.3.22)式中解出 s_{m-1}^m和 d_{m-1}^m,那么方程组(4.3.9)式的解可用公式(4.2.22)和(4.2.23)重构得到.多尺度策略的思想是从方程组(4.3.22)式解出 d_{m-1}^m,也就是说,将 d_{m-1}^m用 s_{m-1}^m表示出来,然后将 d_{m-1}^m代入(4.3.21)式.这样,只需从(4.3.21)式解出 s_{m-1}^m即

可. 这时,方程组(4.3.21)的未知数的个数只有方程组(4.3.9)的未知数个数的一半,计算量大为减少. 但遗憾的是,做到这一点很难. 因为矩阵 F_{11}^{m-1}可能是一个稠密矩阵,这样我们很难快速精确求解. 我们注意到函数 $b(x,y)$是光滑的,F_{11}^{m-1}的模在 m 很大时可以非常小. 因此尽管我们不能精确解出 d_{m-1}^{m},但我们可以求出一个近似解来代替. 根据这个思路,将 $E_{11}^{m-1}d_{m-1}^{m}$移到(4.3.22)式的左边,然后两边同时乘以 $\gamma^{m-1}:=(I-E_{11}^{m-1})^{-1}$得到

$$d_{m-1}^{m}=\gamma^{m-1}(E_{10}^{m-1}+F_{10}^{m-1})s_{m-1}^{m}+\gamma^{m-1}F_{11}^{m-1}d_{m-1}^{m}+\gamma^{m-1}g_{d}^{m-1}, \tag{4.3.23}$$

这里我们假设 γ^{m-1}在 m 较大时都存在. 将(4.3.23)式代入(4.3.21)式的 $E_{01}^{m-1}d_{m-1}^{m}$中,可以得到

$$\begin{aligned} s_{m-1}^{m} &= [(E_{00}^{m-1}+E_{01}^{m-1}\gamma^{m-1}E_{10}^{m-1})+F_{00}^{m-1}]s_{m-1}^{m} \\ &\quad +(E_{01}^{m-1}\gamma^{m-1}g_{d}^{m-1}+g_{s}^{m-1}) \\ &\quad +(E_{01}^{m-1}\gamma^{m-1}F_{10}^{m-1}s_{m-1}^{m}+F_{01}^{m-1}d_{m-1}^{m} \\ &\quad +E_{01}^{m-1}\gamma^{m-1}F_{11}^{m-1}d_{m-1}^{m}). \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

我们已经知道,所有矩阵 E_{*}^{*}都是对角的,并且所有矩阵 F_{*}^{*}都可能是稠密的. 如果我们想避免稠密矩阵的乘积,就必须用一些技巧来处理. 上面提到,因为 $b(x,y)$是光滑的,而样条对光滑函数的逼近是多项式阶的,所以矩阵 F_{01}^{m-1},F_{10}^{m-1}和 F_{11}^{m-1}的模非常小. 实际上,我们将在第四节中证明当 m 趋向无穷时,矩阵 F_{01}^{m-1},F_{10}^{m-1}和 F_{11}^{m-1}的模具有阶 h_{m}^{r},其中 r 是函数 $b(x,y)$的光滑度. 但是,E_{01}^{m-1},E_{10}^{m-1}和 E_{11}^{m-1}的模仅仅具有阶 h_{m}. 因此,在一定条件下(见定理 4.5.1),我们可以忽略所有阶为 h_{m}^{r} 的项,但这并不影响近似解的逼近阶.

我们注意到,(4.3.24)式最后三项都含有一个模较小的因子,

即 F_{01}^{m-1}, F_{10}^{m-1}或 F_{11}^{m-1}. 这样,我们可以将它们舍去. 具体做法如下:将(4.3.24)式改写为

$$s_{m-1}^{m} = (\widetilde{E}^{m-1} + \widetilde{F}^{m-1}) s_{m-1}^{m} + \rho^{m-1} + \widetilde{g}^{m-1}, \tag{4.3.25}$$

其中

$$\widetilde{E}^{m-1} = E_{00}^{m-1} + E_{01}^{m-1} \gamma^{m-1} E_{10}^{m-1}, \tag{4.3.26}$$

$$\widetilde{F}^{m-1} = F_{00}^{m-1}, \tag{4.3.27}$$

$$\begin{aligned} \rho^{m-1} &= E_{01}^{m-1} \gamma^{m-1} F_{10}^{m-1} s_{m-1}^{m} + F_{01}^{m-1} d_{m-1}^{m} \\ &\quad + E_{01}^{m-1} \gamma^{m-1} F_{11}^{m-1} d_{m-1}^{m}, \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

$$\widetilde{g}^{m-1} = g_0^{m-1} + E_{01}^{m-1} \gamma^{m-1} g_1^{m-1}. \tag{4.3.29}$$

我们后面将证明 ρ^{m-1}的模的确是一个很小的量. 因此,我们只需要从下面的方程中解出 $\widetilde{s}^{m-1}$:

$$\widetilde{s}^{m-1} = (\widetilde{E}^{m-1} + \widetilde{F}^{m-1}) \widetilde{s}^{m-1} + \widetilde{g}^{m-1}. \tag{4.3.30}$$

4.3.4 算法

在第五节中,我们将证明 $\widetilde{s}^{m-1}$和 s_{m-1}^{m}的差异很小,但我们可以看出方程(4.3.30)的未知数的个数只有方程(4.3.9)未知数个数的一半. 并且,如果我们求解出 $\widetilde{s}^{m-1}$,那么我们只需要再求解出 d_{m-1}^{m},用两个解来重构 s^{m}. 运用同样的手法,从方程(4.3.21)和(4.3.23)可知,d_{m-1}^{m}的值可以用下面方程的解来近似:

$$\widetilde{d}^{m-1} = \gamma^{m-1} E_{10}^{m-1} \widetilde{s}^{m-1} + \gamma^{m-1} g_1^{m-1}, \tag{4.3.31}$$

这同样是因为 F_{11}^{m-1}和 F_{10}^{m-1}的模非常小.

我们还注意到(4.3.30)式的形式和(4.3.9)式的形式完全相同,所以上面的处理方法可以反复使用. 可以看出,待求未知量的个数逐次减半. 然而,我们不可能将此过程一直进行到底,以至于

最后求解一个标量方程. 这是因为随着过程的一步步深入,方程的解和真实解的误差也逐渐增大. 为了保证近似解的逼近度,我们将在某一个层次上就停止了上述近似的过程,这个层次我们记为 m_1. 以上就是该算法的主要思路. 在详细描述该算法之前,我们需要引入一些记号以便于阐述.

对于 $k<m$,令 $\tilde{s}^k$ 是下面方程的真解

$$\tilde{s}^k = (\tilde{E}^k + \tilde{F}^k)\tilde{s}^k + \tilde{g}^k. \tag{4.3.32}$$

定义 $\tilde{s}_k^{k+1} := L_k \tilde{s}^{k+1}$,那么从(4.3.25)式我们可以看出 $\tilde{s}_k^{k+1}$满足方程

$$\tilde{s}_k^{k+1} = (\tilde{E}^k + \tilde{F}^k)\tilde{s}_k^{k+1} + \tilde{g}^k + \rho^k, \tag{4.3.33}$$

其中

$$\tilde{E}^k = \tilde{E}_{00}^k + \tilde{E}_{01}^k \gamma^k \tilde{E}_{10}^k, \quad \tilde{F}^k = \tilde{F}_{00}^k, \tag{4.3.34}$$

$$\rho^k = \tilde{E}_{01}^k \gamma^k \tilde{F}_{10}^k \tilde{s}_k^{k+1} + \tilde{E}_{01}^k \gamma^k \tilde{F}_{11}^k \tilde{d}_k^{k+1} + \tilde{F}_{01}^k \tilde{d}_k^{k+1} \tag{4.3.35}$$

以及

$$\tilde{g}^k = \tilde{g}_0^k + \tilde{E}_{01}^k \gamma^k \tilde{g}_1^k. \tag{4.3.36}$$

在这里,与(4.3.15)式~(4.3.20)式类似,我们使用如下记号:

$$\tilde{g}_0^k = L_{k+1}\tilde{g}^{k+1}, \quad \tilde{g}_1^k = H_{k+1}\tilde{g}^{k+1}, \tag{4.3.37}$$

$$\tilde{E}_{00}^k = L_{k+1}\tilde{E}^{k+1}L_{k+1}^T, \quad \tilde{E}_{01}^k = L_{k+1}\tilde{E}^{k+1}H_{k+1}^T, \tag{4.3.38}$$

$$\tilde{E}_{10}^k = H_{k+1}\tilde{E}^{k+1}L_{k+1}^T, \quad \tilde{E}_{11}^k = H_{k+1}\tilde{E}^{k+1}H_{k+1}^T, \tag{4.3.39}$$

$$\tilde{F}_{00}^k = L_{k+1}\tilde{F}^{k+1}L_{k+1}^T, \quad \tilde{F}_{01}^k = L_{k+1}\tilde{F}^{k+1}H_{k+1}^T, \tag{4.3.40}$$

$$\tilde{F}_{10}^k = H_{k+1}\tilde{F}^{k+1}L_{k+1}^T, \quad \tilde{F}_{11}^k = H_{k+1}\tilde{F}^{k+1}H_{k+1}^T, \tag{4.3.41}$$

$$\gamma^k = (I - \tilde{E}_{11}^k)^{-1}. \tag{4.3.42}$$

使用上述记号,我们有:

$$\tilde{F}^{m_1} = F^{m_1}. \tag{4.3.43}$$

另外,我们还记 $\tilde{E}^m = E^m$, $\tilde{F}^m = F^m$, $\tilde{s}^m = s^m$, $\tilde{g}^m = g^m$. 再令

$$\bar{d}^k = \gamma^k \widetilde{E}_{10}^k \bar{s}^k + \gamma^k \widetilde{g}_1^k, \tag{4.3.44}$$

其中

$$\bar{s}^k = L_k^T \bar{s}^{k-1} + H_k^T \bar{d}^{k-1}. \tag{4.3.45}$$

当 $k = m_1$ 时，我们定义 $\bar{s}^{m_1} = \widetilde{s}^{m_1}$. 与(4.3.31)类似，我们定义

$$\widetilde{d}^k = \gamma^k \widetilde{E}_{10}^k \widetilde{s}^k + \gamma^k \widetilde{g}_1^k. \tag{4.3.46}$$

基于前面所述的思路和记号，我们可以得到如下算法：

算法：

步骤 1 计算 E^m, F^{m_1} 和 g^m(参看(4.3.8)式)，其中 m 充分大. 对 $m_1 \leqslant k < m$，利用(4.3.34)式～(4.3.41)式计算 $\widetilde{E}^k$, $\widetilde{g}^k$, $\widetilde{g}_1^k$, $\widetilde{g}_0^k$ 和 $\widetilde{E}_l^k$，其中 l 代表 00,01,10 和 11 中的任意一个.

步骤 2 对 $k = m_1$，求解下面的线性方程组

$$\widetilde{s}^k = (\widetilde{E}^k + \widetilde{F}^k)\widetilde{s}^k + \widetilde{g}^k. \tag{4.3.47}$$

这里，我们可以使用如高斯消去法等算法.

步骤 3 利用(4.3.44)式计算 $\bar{d}^k$，其中当 $k = m_1$ 时，$\bar{s}^k = \widetilde{s}^k$.

步骤 4 重构：$(\widetilde{s}^k, \widetilde{d}^k) \to \bar{s}^{k+1}$，这里使用(4.3.45)，即

$$\bar{s}^{k+1} = L_{k+1}^T \bar{s}^k + H_{k+1}^T \bar{d}^k. \tag{4.3.48}$$

令 $k+1 \to k$.

步骤 5 转到步骤 3 直至 $k = m$.

当我们完成上述步骤后，我们可以使用(4.3.3)式来计算(4.3.2)式的近似解，其中在(4.3.3)式中用 $\bar{s}^m := (\bar{s}^m)$ 来代替 $\widetilde{s}^m$，即我们用下式计算近似解 u_m：

$$\bar{u}_m = \sum_{k=0}^{K(m)-1} \bar{s}_k^m A_k^{n,m}(x). \tag{4.3.49}$$

4.3.5 计算复杂度分析

对于算法的步骤 1，我们可以利用熟知的算法. 可以看出其计算复杂度为 $O(K(m)\log K(m) + O(K(m_1)^2\log(K(m_1)))$，其

中第二部分是计算 F^{m_1}的计算复杂度.

在第 m_1 层,可以使用包括高斯消去法在内的任何求解算法解方程组(4.3.47),这样算法复杂度为 $O(K_{m_1}^3)$,即 $O(K(m)^{3m_1/m})$.

步骤 3 计算 $\bar{d}^k$ 的计算量是$O(K(\kappa))$,这是因为矩阵 $\widehat{E}_{10}^k$是对角矩阵. 同样,我们在步骤 4 中计算 $\bar{s}^{k+1}$ 的复杂度为 $O(K(k))$. 从步骤 3 到步骤 5,将所有的计算量加在一起,我们会发现总共需要 $O(K(m))$次代数计算. 这样,整个算法的计算复杂度为

$$O(K(m)^{3m_1/m}) + O(K(m_1)^2\log(K(m_1))) + O(K(m)\log(K(m))).$$

为了使复杂度尽可能的降低,只要 $m_1 = \left[\frac{m+2}{3}\right]$就可以了,其中 $[x]$表示 x 的整数部分. 事实上,后面我们将证明 $m_1 = \left[\frac{m+2}{3}\right]$也能够保证近似解的逼近阶. 因此,我们就证明了算法的计算复杂度是 $O(K(m)\log(K(m)))$. 归纳为下面的定理.

定理 4.3.5.1 当 $m_1 = \left[\frac{m+2}{3}\right]$时,算法的计算复杂度为 $O(K(m)\log(K(m)))$.

§ 4.4 Galerkin 逼近的收敛性

在这一节中,我们将讨论方程(4.3.2)的解和方程(4.3.1)的解之间的误差. 为此,我们引用文献[47]的一个引理. 这里使用的是$\mathring{L}_2$-范数,即给定 $f\in \mathring{L}_2([0,2\pi]\times[0,2\pi])$,那么 f 的范数为

$$\| f \|^2 := \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引理 4.4.1 对 $f\in \mathring{C}^s([0,2\pi]\times[0,2\pi])$($s\leqslant n$),其中 n 是 B-样条函数的次数,f_m 是f 向 $V_m\otimes V_m$ 上的正交投影,那么我们

有如下估计：

$$\| f - f_m \| \leqslant C h_m^s, \tag{4.4.1}$$

其中 C 为一个常数.

类似地，我们有如下引理.

引理 4.4.2 对 $u \in \mathring{C}^s([0,2\pi])(s \leqslant n)$，令

$$(T_1 u)(x) := \int_0^{2\pi} a(x-y) \log\left|2\sin\frac{x-y}{2}\right| u(y)\mathrm{d}y,$$

那么

$$\| T_1 u - P_m T_1 u \| \leqslant C h_m^s, \tag{4.4.2}$$

其中 C 是一个依赖于 u 的绝对常数.

证明 记 $\widetilde{u}_m(x,y)$ 为 $u(x-y)$ 向空间 $V_m \otimes V_m$ 上的正交投影，也就是说，

$$\widetilde{u}_m(x,y) = \sum_{i,j} u_{ij} A_i^{n,m}(x) \overline{A_j^{n,m}(y)},$$

其中 $u_{ij} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x-y)\overline{A_i^{n,m}(x)} A_i^{n,m}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 那么我们有

$$\| T_1 u - P_m T_1 u \| \leqslant$$

$$\left\| \int_0^{2\pi} a(y)\log\left|2\sin\frac{y}{2}\right|(u(\cdot - y) - \widetilde{u}_m(\cdot, y))\mathrm{d}y \right\|. \tag{4.4.3}$$

令 $\hat{u}(x,y) = u(x-y)$，那么从引理 4.4.1，我们有

$$\| T_1 u - P_m T_1 u \| \leqslant C \| \hat{u} - \widetilde{u}_m \| \leqslant C' h_m^s.$$

定理 4.4.1 设 u_m 是方程(4.3.2)的解，u 是方程(4.3.1)的解. 我们还假设 $I - T$ 有有界逆及 $b \in \mathring{C}^r([0,2\pi]\otimes[0,2\pi])$，$g \in \mathring{C}^s([0,2\pi])$，$u \in \mathring{C}^s([0,2\pi])$，其中 $s \leqslant r \leqslant n$. 那么

$$\| u - u_m \| \leqslant C h_m^s, \tag{4.4.4}$$

这里 C 是一个与 m 无关的常数.

证明 因为 u 和 u_m 分别满足(4.3.1)式和(4.3.2)式,所以我们有

$$\begin{aligned} u - u_m &= Tu - P_mTu_m + g - P_mg \\ &= Tu - P_mTu + P_mTu - P_mTu_m + g - P_mg. \end{aligned}$$

从文献[39,pp142]中的定理 10.1 可知,对充分大的 m, $I - P_mT$ 是可逆的,并且与其逆算子有相同的界.从定理 4.2.4,引理 4.4.1 和引理 4.4.2,我们有

$$\begin{aligned} \| u - u_m \| &= \| (I - P_mT)^{-1}[(Tu - P_mTu) + (g - P_mg)] \| \\ &\leqslant Ch_m^s, \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

这里我们在应用引理 4.4.1 时用到了 $b(x,y)$ 的光滑度.定理获证.

注记 4.4.1

1. I-T 有有界逆的假设条件并不强.由于 T 是一个紧算子,故只需要 I-T 的零空间为平凡的,这个条件能够满足.例如,对于那些从 Laplace 方程或者共形映照的构造问题转化来的此种方程,上述条件就满足(参见[42]).当然,如果 T 算子范数是小于 1 的,那么该假设自然成立.

2. 另外,对方程的解 u 的光滑度的假设也是合理的.采用文献[51,p592]中的由许和赵发展的方法,我们可以证明如果函数 a, b 和 g 是光滑的,那么方程(4.1.1)的解 u 也是光滑的.

§4.5 误差分析

在这一节中,我们将分析算法中的计算误差.令 s^m 是方程

$$s^m = (E^m + F^m)s^m + g^m \tag{4.5.1}$$

的解,其中 E^m, F^m 和 g^m 由(4.3.8)式定义.令 $\bar{s}^m$ 是由(4.3.44)式定义的 s^m 的近似解.

我们首先考虑误差 $\| s^m - \bar{s}^m \|$,这里使用的范数是欧氏范数.从(4.3.44)式和周期拟小波变换的正交性可知

$$\| s^m - \bar{s}^m \|^2 = \| L_m^T (s_{m-1}^m - \bar{s}^{m-1}) + H_m^T (d_{m-1}^m - \bar{d}^{m-1}) \|^2$$
$$= \| s_{m-1}^m - \bar{s}^{m-1} \|^2 + \| d_{m-1}^m - \bar{d}^{m-1} \|^2, \tag{4.5.2}$$

其中 s_{m-1}^m 满足(4.3.21)式.下面我们用迭代法来估计 $s^m - \bar{s}^m$.为此,我们需要几个引理.

引理 4.5.1 在定理 4.4.1 的条件下我们有,对 $\& = 01, 10, 11$,

$$\| E_{\&}^{k-1} \| \leqslant M_e h_{k-1}, \tag{4.5.3}$$

$$\| F_{\&}^{k-1} \| \leqslant M_f h_{k-1}^r, \tag{4.5.4}$$

其中 M_e 和 M_f 是不依赖于 k 的常数, $\| A \|$ 表示矩阵 A 的范数,该范数是向量范数为欧几里德范数所导出的矩阵范数.

证明 (4.5.4)式从引理 4.4.1 很容易证明.因为我们有如下不等式:对 $\& = 01, 10, 11$,

$$\| F_{\&}^{k-1} \| \leqslant \| b_k(x,y) - b_{k-1}(x,y) \|,$$

其中 $b_k(x,y)$ 是 $b(x,y)$ 在 $V_k \otimes V_k$ 上的正交投影.

对(4.5.3)式,我们只证对 $\& = 01$ 该式成立,其他情况可类似证明.

我们知道这里的矩阵范数实际上就是矩阵的谱半径,也就是说,对于一个矩阵 A,

$$\| A \| = \max\{ |\lambda| \,\big|\, \lambda \text{ 是} A \text{ 的特征值} \}.$$

因此我们有 $\| E_{01}^{k-1} \| \leqslant \max\limits_{0 \leqslant j < K(k-1)} \{ | E_{01}^{k-1}(j,j) | \}$.这样,我们只需估计 $| E_{01}^{k-1}(j,j) |$.由(4.3.7)式,我们得到

$$E_{01}^{k-1}(j,j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(x-y) A_j^{n,k-1}(x) \overline{D_j^{n,k-1}(y)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= \frac{a_j^k b_j^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(x-y) (A_j^{n,k}(x) \overline{A_j^{n,k}(y)}$$

$$- A^{n,k}_{j+K(k-1)}(x)\,\overline{A^{n,k}_{j+K(k-1)}(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (4.5.5)$$

采用定理 4.2.6 的证明方法，我们可以证明

$$\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(x-y)A^{n,k}_j(x)\,\overline{A^{n,k}_j(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant C_0\frac{1}{j}. \qquad (4.5.6)$$

同样，对 $j=1,2,\cdots,K(k-1)-1$，

$$\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(x-y)A^{n,k}_{j+K(k-1)}(x)\,\overline{A^{n,k}_{j+K(k-1)}(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant C_0\frac{1}{K(k-1)-j} \qquad (4.5.7)$$

成立.

从(4.2.32)式，(4.2.33)式，(4.5.6)式和(4.5.7)式，我们可知

$$E^{k-1}_{01}(j,j)\leqslant C\frac{K(k-1)-j}{K(k)}\frac{j}{K(k)}\left(\frac{1}{j}+\frac{1}{K(k-1)-j}\right) \leqslant C\frac{1}{K(k)}\leqslant M_e h_{k-1}.$$

对于 $j=0$，上式同样成立. 引理 4.5.1 得证.

除了 $E^k_{\&}$ 和 $F^k_{\&}$，我们还需要估计 $\widetilde{E}^k_{\&}$ 和 $\widetilde{F}^k_{\&}$ 的模，这里 & 表示 01，10，11 中之一.

引理 4.5.2 对引理 4.5.1 中的常数 M_e，假设有一个充分大的整数 m_0 使得对所有的 $k\geqslant m_0$，

$$M_e h_k \leqslant 0.25. \qquad (4.5.8)$$

那么对 $m_0\leqslant k<m$，我们有

$$\|\widetilde{E}^k_{\&}\|\leqslant 2M_e h_k, \qquad (4.5.9)$$

$$\|\widetilde{F}^k_{\&}\|\leqslant 2M_f h^r_k, \qquad (4.5.10)$$

其中 & =01，10，11. 记 $\widetilde{\gamma}^k=(I-\widetilde{E}^k_{11})^{-1}$，那么我们可以得到

$$\|\widetilde{\gamma}^k\|\leqslant 2. \qquad (4.5.11)$$

证明 这里我们只证明(4.5.9)式当 & =01 时的情况，其他

情形类似可证. 我们使用归纳法证明之. 对 $k=m-1$, 从(4.3.38)式和(4.3.41)式, 我们知道 $\widetilde{E}_{\&}^{m-1}=E_{\&}^{m-1}$ 及 $\widetilde{F}_{\&}^{m-1}=F_{\&}^{m-1}$. 因此从引理 4.5.1 可知, 此结论已经证明. 假设对 $k\leqslant m-1$ 引理正确, 我们来考察 $k-1$ 的情况.

从(4.3.38)式和(4.3.34)式中 $\widetilde{E}_{01}^{k}$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\|\widetilde{E}_{01}^{k-1}\| &= \|L_k\widetilde{E}^kH_k^T\|\\ &= \|L_k\widetilde{E}_{00}^kH_k^T+L_k\widetilde{E}_{01}^k\gamma^k\widetilde{E}_{10}^kH_k^T\|.\end{aligned}$$

由于 $\|L_k\|\leqslant 1$ 和 $\|H_k\|\leqslant 1$, 所以我们有

$$\|\widetilde{E}_{01}^{k-1}\|\leqslant\|L_k\widetilde{E}_{00}^kH_k^T\|+\|\widetilde{E}_{01}^k\|\,\|\gamma^k\|\,\|\widetilde{E}_{10}^k\|.$$

根据归纳假设,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{E}_{01}^{k-1}\| &\leqslant \|L_k\widetilde{E}_{00}^kH_k^T\|+8(M_eh_k)^2\\ &\leqslant \|L_kL_{k+1}\widetilde{E}^{k+1}L_{k+1}^TH_k^T\|+M_eh_k,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是从(4.3.38)式得到. 反复使用上述不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}\|\widetilde{E}_{01}^{k-1}\| &\leqslant \|L_kL_{k+1}\widetilde{E}_{00}^{k+1}L_{k+1}^TH_k^T\|+M_eh_{k+1}+M_eh_k\\ &\leqslant \|L_k\cdots L_mE^mL_m^T\cdots L_{k+1}^TH_k^T\|+2M_eh_k\\ &\leqslant \|L_kE^kH_k^T\|+2M_eh_k\leqslant\|E_{01}^{k-1}\|+2M_eh_k\\ &\leqslant 2M_eh_{k-1},\end{aligned}\tag{4.5.12}$$

其中最后一个不等式可从引理 4.5.1 得到. 因此, 由归纳法知, (4.5.9)式成立. 证毕.

在算法的每一个计算步骤中, 我们实际上需要矩阵 $I-\widetilde{E}^k-\widetilde{F}^k$ 是可逆的. 下面一个引理对此作了证明.

引理 4.5.3 假设 $I-T$ 有有界逆, 因此存在一个常数 M 和一个整数 m_2 使得对 $k\geqslant m_2$, 都有 $\|I-E^k-F^k\|<M$. 那么就存在一个整数 m_3 使得对 $\max\{m_2,m_0\}\leqslant m_3\leqslant k<m$, 我们有

$$\|(I-\widetilde{E}^k-\widetilde{F}^k)^{-1}\|\leqslant M_c,\tag{4.5.13}$$

其中 M_c 是不依赖于 k 和 m 的常数.

证明 从(4.3.34)式我们得到

$$\|\widetilde{E}^k - E^k\| = \|\widetilde{E}^k_{00} + \widetilde{E}^k_{01}\gamma^k\widetilde{E}^k_{10} - E^k\|$$
$$\leqslant \|\widetilde{E}^k_{00} - E^k\| + \|\widetilde{E}^k_{01}\|\|\widetilde{\gamma}^k\|\|\widetilde{E}^k_{10}\|.$$

从引理 4.5.2,我们有

$$\|\widetilde{E}^k - E^k\| \leqslant \|\widetilde{E}^k_{00} - E^k\| + 2(2M_e h_k)^2.$$

将(4.3.38)式代入上式得到

$$\|\widetilde{E}^k - E^k\| \leqslant \|L_{k+1}\widetilde{E}^{k+1}L^T_{k+1} - E^k\| + 2(2M_e h_k)^2.$$

反复使用上述技巧有

$$\|\widetilde{E}^k - E^k\| \leqslant \|L_{k+1}\widetilde{E}^{k+1}_{00}L^T_{k+1} - E^k\|$$
$$+ 2(2M_e h_{k+1})^2 + 2(2M_e h_k)^2$$
$$\leqslant \|L_{k+1}\cdots L_m\widetilde{E}^m L^T_m\cdots L^T_{k+1} - E^k\| + 4(2M_e h_k)^2$$
$$\leqslant \|E^k - E^k\| + 4(2M_e h_k)^2,$$

其中最后一个不等式是基于这样一个事实:根据我们的定义有 $\widetilde{E}^m = E^m$. 对 $\max\{m_2, m_0\}\leqslant k$,我们有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|E^k - \widetilde{E}^k\| = 0$. 类似地,我们可以证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\|F^k - \widetilde{F}^k\| = 0$,也就是说,

$$\lim_{k\to\infty}\|E^k + F^k - \widetilde{E}^k - \widetilde{F}^k\| = 0.$$

至此,(4.5.13)式获证. 证毕.

我们算法的想法是每次扔掉一个小项 ρ^k 以使得计算复杂度得以降低. 在引理 4.5.5 中,我们将证明 ρ^k 确实足够的小. 在此之前,我们还需要证明引理 4.5.4.

引理 4.5.4 对任给 $m_3\leqslant k < m$,存在一个与 k 无关的常数 M_0 使得

$$\|\widetilde{s}^k\| \leqslant M_0 \tag{4.5.14}$$

当光滑度 $r\geqslant 0$ 时成立.

证明 从(4.3.32)式,(4.3.33)式和引理 4.5.3,我们可以得

到

$$\| \tilde{s}^k \| \leqslant \| \tilde{s}^k - \tilde{s}_k^{k+1} \| + \| \tilde{s}_k^{k+1} \|$$

$$\leqslant M_c \| \rho^k \| + \| \tilde{s}_k^{k+1} \| .$$

又从(4.3.35)式和引理 4.5.2,我们有

$$\| \tilde{s}^k \| \leqslant (6M_cM_f h_k^r + 1) \| \tilde{s}^{k+1} \| .$$

反复使用上述不等式得到

$$\| \tilde{s}^k \| \leqslant \prod_{j=k}^{m-1} (1 + 6M_cM_f h_j^r) \| \tilde{s}^m \| .$$

注意到$|1+x| \leqslant e^{|x|}$,所以

$$\| \tilde{s}^k \| \leqslant \exp\left\{ \sum_{j=k}^{m} 6M_cM_f h_j^r \right\} \| s^m \|$$

$$\leqslant M_1 \| s^m \| \leqslant M_1 M_c \| g^m \| \leqslant M_0 ,$$

其中最后一个不等式是由于不等式$\| g^m \| \leqslant \| g \|$.证毕.

从引理 4.5.4 和引理 4.5.2,我们可以证明下面的结论.

引理 4.5.5 存在一个与 k 和 m 无关的常数M_ρ使得

$$\| \rho^k \| \leqslant M_\rho h_k^r \tag{4.5.15}$$

对 $m_3 < k < m$ 成立.

现在我们可以说明我们的主要问题,即估计算法的误差.令 s^m 是线性方程组

$$s^m = (E^m + F^m) s^m + g^m \tag{4.5.16}$$

的解,$\bar{s}^m$ 如(4.3.45)式所定义,其中 $k=m$,那么我们有

定理 4.5.1 对 $m \geqslant 3m_3, m_1 = \left[\dfrac{m+2}{3}\right]$及 $r \geqslant 3s > 0$,我们有

$$\| s^m - \bar{s}^m \| \leqslant M_a h_m^s , \tag{4.5.17}$$

其中 M_a 是一个与 m 无关的常数。

证明 从 s^m 和 $\bar{s}^m$ 的定义知,

$$\| s^m - \bar{s}^m \| \leqslant \| s_{m-1}^m - \bar{s}^{m-1} \| + \| d_{m-1}^m - \bar{d}^{m-1} \| .$$

将 d^m_{m-1} 和 $\bar{d}^{m-1}$ 的表达式代入上面不等式的左边得

$$
\begin{aligned}
\| s^m - \bar{s}^m \| \leqslant & \| s^m_{m-1} - \bar{s}^{m-1} \| \\
& + \| \gamma^{m-1} E^{m-1}_{10} \| \| s^m_{m-1} - \bar{s}^{m-1} \| \\
& + \| \gamma^{m-1} F^{m-1}_{10} \| \| s^m_{m-1} \| + \| \gamma^{m-1} F^{m-1}_{11} d^m_{m-1} \| .
\end{aligned}
$$

从引理 4.5.2,我们有

$$
\begin{aligned}
& \| s^m - \bar{s}^m \| \\
\leqslant & (1 + 4M_e h_{m-1}) \| s^m_{m-1} - \bar{s}^{m-1} \| + 8M_0 M_f h^r_{m-1} \\
\leqslant & (1 + 4M_e h_{m-1}) (\| s^m_{m-1} - \tilde{s}^{m-1} \| + \| \tilde{s}^{m-1} - \bar{s}^{m-1} \|) \\
& + 8M_0 M_f h^r_{m-1}.
\end{aligned}
$$

将(4.3.25)式和(4.3.32)式代入上面不等式的右边,结合引理 4.5.3得到

$$
\begin{aligned}
& \| s^m - \bar{s}^m \| \\
\leqslant & (1 + 4M_e h_{m-1}) (M_c \| \rho^{m-1} \| + \| \tilde{s}^{m-1} - \bar{s}^{m-1} \|) \\
& + 8M_0 M_f h^r_{m-1}.
\end{aligned}
$$

从引理 4.5.5,我们得到

$$
\| s^m - \bar{s}^m \| \leqslant M_0 h^r_{m-1} + (1 + 4M_e h_{m-1}) \| \bar{s}^{m-1} - \tilde{s}^{m-1} \| .
$$

采用归纳法,我们可以反复使用上述不等式得到

$$
\begin{aligned}
& \| s^m - \bar{s}^m \| \\
\leqslant & M_1 \sum_{j=m_1}^{m-1} \Big(\prod_{l=j}^{m-2} (1 + 4M_e h_l) \Big) h^r_j + (1 + 4M_e h_{m_1}) \| \tilde{s}^{m_1} - \bar{s}^{m_1} \| \\
\leqslant & M_1 \sum_{j=m_1}^{m-1} \exp \Big\{ \sum_{l=j}^{m-2} 4M_e h_l \Big\} h^r_j ,
\end{aligned}
$$

其中最后一个不等式是因为 $\tilde{s}^{m_1} = \bar{s}^{m_1}$. 经过直接计算可以得到

$$
\| s^m - \bar{s}^m \| \leqslant M_2 \sum_{j=m_1}^{m-1} h^r_j \leqslant M_3 h^r_{m_1} \leqslant M_4 (h_m)^{\frac{rm_1}{m}} .
$$

至此, 我 们 可 以 看 出 如 果 $r \geqslant 3s$ 并 且 $m_1 = \left[\dfrac{m+2}{3} \right]$, 那 么

(4.5.17)式是正确的。证毕。

定义

$$\bar{u}_m := \sum_{\nu=0}^{K(m)-1} \bar{s}^m A_\nu^{n,m}.$$

因为 s^k 的分量是函数 u_k 在空间 V_k 的基上的展开系数,所以我们可以得到如下推论。

推论 4.5.1 设 $\bar{u}_m$ 是算法得到的近似解.对充分大的 m,以及 $r \geqslant 3s > 0$,存在一个与 m 无关的常数 M 使得

$$\| u - \bar{u}_m \| \leqslant M h_m^s A!\# \tag{4.5.18}$$

注记 4.5.1

1. 定理 4.5.1 的条件稍微有点强,我们希望能够减弱.

2. 众所周知,Galerkin 逼近是强收敛的,虽然我们这里只证明了一个简单的结果,但这个结果对算法是可接受的.

参考文献

1 Chen H L. Complex Harmonic Splines, Periodic Quasi-wavelets. Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, 2000

2 Meyer Y. Wavelets and Operators, Cambridge: Cambridge University Press, 1993

3 Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets, CBMS/NSF Series in Applied Mathematics, V. 61. SIAM Publ, 1992

4 Perrier V and Basdevant C. Periodic wavelet analysis, a tool for inhomogeneous field investigation. Theory and Algorithms, Rech Aerospat, 1989, 3: 53 – 67

5 Chui C K and Mhaskar H N. On trigonometric wavelets. Const. Approx. 1993, V.9(2 – 3): 167 – 190

6 Chen H L. Construction of orthonormal wavelet basis in periodic case. Chinese Science Bulletin, 1996, V. 41(7)

7 Chen H L. Wavelets from trigonometric spline approach, Approx. theory & its Appl, 1996, V. 12(2): 99 – 110

8 Chen H L. Wavelets on the unit circle. Result Math, 1997, V. 31: 322 – 336

9 Chen H L. Antiperiodic wavelets. Journal of Computational mathematics, 1996, V. 14(1): 32 – 39

10 Koh Y W, Lee S L and Tan H H. Periodic orthogonal splines and wavelets. Appl. Comput. Harmonic Anal, 1995, V. 2(3): 201 – 218

11 Narcowich F J and Ward J D. Wavelets associated with periodic basis functions. Appl. Comput. Harmonic Anal, 1996, V. 3(1): 40 – 56

12 Plonka G and Tasche M. A unified approach to periodic wavelets. In Chui C K, Montefusco L, Puccio L(eds). Wavelets: Theory, Algorithms and Applications, 1994, 137 – 151

13 Folland G B. Fourier Analysis and Its Applicaton. Wadsworth & Brooks/ Cole. Pacific Grove CA 1992

14 Li D F and Peng S L. Biorthogonality of general periodic scaling function Ad-

vances in Computational Mathematics, Z. Chen et al., Lecture Notes in Pure and Appl Mathematics, Marcel Dekker, Inc., 1999, V.202: 299 - 311

15 Li D F and Peng S L. Characterizations of periodic multiresolution analysis and an application. Acta Mathematica Sinica, New Series, 1998, 14(4):547 - 554

16 Schoenberg I J. Positive define functions on spheres. Duke Math J, 1942, 9: 96 - 108

17 De Boor C, DeVore R and Ron A. Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(R^d)$. Trans Amer Math Soc, 1994, 341: 787 - 806

18 Breitenberger E. Uncertainty measures and uncertainty relations for angle observables. Found Phys, 1983, 15: 353 - 364

19 Madych W R and Nelson S A. Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions. Approx Theory and its Appl, 1998, 4: 77 - 79

20 Madych W R and Nelson S A. Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions II. Math Comp, 1990, 54: 211 - 230

21 Narcowich F J. Generalized Hermite interpolation and positive definite kernels on a Rimannian manifold. J Math Anal Appl, 1995, 190: 165 - 193

22 Powell M J D. The theory of radial basis approximation in 1990, in: Wavelets, Subdivision and Radial Functions (W Light, ed.), Oxford Univ Press, London, 1990, 105 - 210

23 Chen H L and Xiao S L. Periodic cardinal interpolatory wavelets. Chin. An Math, 1998, 19B(2): 133 - 142

24 Chen H L and Peng S L. Local properties of cardinal interpolatory scalin functions Acta Mathematica Sinica, English Series, 2000, 16(1):613 - 620

25 李登峰,彭思龙,陈翰麟.一类周期小波的局部性质. 数学学报,2001, 44(5):947 - 960

26 龙瑞麟.高维小波分析.世界图书出版公司,1995

27 Goh S S, Lee S L and Teo K M. Multidimensional periodic multiwavelets. J Approx Theory, 1999, 98(1):72 - 103

28 Chen H L and Li D F. Construction of Multidimensional biorthogonal periodic multiwavelets. Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 2000, 21(3): 223 - 232

29 Chen H L and Peng S L. A Quasi-wavelet algorithm for second kind boundary

integral equations. Adv Comput Math, 1999, 11: 355 – 375

30 Amaratunga K, Williams J R, Qian S and Weiss J. Wavelet-Galerkin solutions For One-dimensional partial differential equations. Internat. J Numer Methods Engrg, 1994, V.37: 2703 – 2716

31 Brewster M E and Beylkin G. A multiresolution strategy for numerical homogenization. Appl Comput Anal, 1995, 2: 327 – 349

32 Beylkin G, Coifman R R and Rokhlin V. Fast Wavelet transforms and numerical algorithms I Commun Pure Appl Math, 1991, V.44 141 – 183

33 de Boor C and Fix G J. Spline Approximation by quasiinterpolatants. J Approx Theory, 1973, V.8: 19 – 45

34 Chen Z Micchelli C A and Xu Y. The Petrov-Galerkin methods for second kind integral equations II: Multiwavelet scheme. Adv Comput Math, 1997, 7: 199 – 233

35 Chen H L and Peng S P. Solving integral equations with logarithmic kernel by using periodic quasi-wavelet, to appear in J Comp Math.

36 Dahmen W, Kleemann B, Prossdorf S and Schneider R. Multiscale methods for the solution of the Helmholtz and Laplace equations, preprint.

37 Dahlke S and Weinreich I. Wavelet Galerkin methods: an adapted biorthogonal wavelet basis. Constr Approx, 1993, V.9: 237 – 262

38 Greenspan D and Werner P. A numerical method for the exterior Dirichlet problem for the reduced waved equation. Arch Rational Mech Anal, 1966, 23: 288 – 316

39 Kelley C T. A fast multilevel algorithm for integral equations. SIAM J Numer Anal, 1995, V.32(2): 501 – 513

40 Kress R. Linear Integral Equations. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989

41 Kress R and Spassov W T. On the condition number of boundary integral operators for exterior Dirichlet problem for the Helmholtz equation. Numer Math, 1983, 42: 77 – 95

42 Kress R and Sloan L H. On the numerical solution of a logarithmic integral equation of the first kind for the Helmholtz equation. Numer Math, 1993, 66: 199 – 214

43 Kamada M, Toraichi K and Mori R. Periodic spline orthonormal bases. J Ap-

prox Theory, 1988, 55: 27 - 34
44 Mallat S. Review of multifrequency channel decomposition of images and wavelet models, Technical report 412, Robotics Report 178. New York University, 1988
45 Meyer Y. Principe d'incertitude, Bases hilbertiennes et algebres d'operateurs, in: Seminaire Bourbaki 662, Asterisque (Societe Mathematique de France), 1985 - 1986
46 Micchelli C A and Xu Y. Weakly singular Fredholm integral equations I: singularity preserving wavelet-Galerkin methods, Approximation Theory VIII, V.2: Wavelets and Multilevel Approximation, C K Chui and L L Schumaker (eds), 1995, 283 - 300
47 Schumaker L. Spline Functions, Basic Theory. New York, Wiley, 1981
48 Schinzinger R and P A A Laura P A A, Conformal Mapping: Methods and Applications, Elsevier Science Publ, 1991
49 Shen Z W and Xu Y. Degenerate kernel schemes by wavelets for nonlinear integral equations on the real line. Appl Anal, 1995, 59: 163 - 184
50 Tasche M. Orthogonal periodic spline wavelets, in: Wavelets, Image and Surface Fitting. P J Laurent, A Le Mehante and Schumaker (eds), 1994, 475 - 484
51 Xu Y and Zhao Y. An extrapolation method for a class of boundary integral equations. Math Comp, 1996, 65: 587 - 610
52 Yan Y. A fast boundary element method for the two dimensional Helmholtz equations. Comput. Method. Appl Mech Engrg, to appear.
53 Yan Y. A fast numerical solution for a second kind boundary integral equation with a logarithmic kernel SIAM J Numer Anal, 1994, V.31(2): 477 - 498
54 Davis P J. Circular Matrices. Wiley, 1979
55 Chen H L and Chui C K. On a generalized Euler spline and its application to the study of convergence in cardinal interpolation and solution of extremal problems. Acta Math Hung, 1993, 61(3 - 4): 219 - 233
56 Schoenberg I J. On polynomial spline functions on the circle (I and II), in: Proceedings of the conference on constructive theory of functions (G Alexits and S B Steckin eds) Budapest, 1972, 403 - 433
57 Micchelli C A. Cardinal L-splines, in: Studies in Spline Functions and Appli-

cation Theory (S. Karlin, C A Micchelli, A Pinkus and I J Schoenberg, eds) New York: Academic Press, 1996, 203 - 250

58 Bojanov B D, Hakopian H A and Sahakian A A. Spline functions and multivariate interpolations, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 1993

59 Whittaker E T and Watson G N. A Course of Modern Analysis. London: Cambridge University Press, 1965

60 Xu Y and Cheney E W. Strictly positive definite functions on spheres. Proc Amer Math Soc, 1992,116: 977 - 981

61 Plonka G and Tasche M. Periodic spline wavelets. Technical Report,1993,4 Germany

62 Chen H L and Peng S L. Localization of Dual Periodic Scaling and Wavelet Functions, To appear in Advances in Computational Mathematics. Special issue on Pohang conference, 2002

后　记

小波分析是一门新的应用数学学科．自从它诞生以来，发展之迅速，应用之广泛，是人们始料不及的．从历史上讲，周期小波要晚于直线上的小波．大致从 20 世纪 90 年代起，以我国数学家陈翰麟教授，新加坡 S L Lee 教授和德国 G Plonka 教授等为代表开创了周期小波的研究．特别是陈翰麟教授，他不仅亲自参加开展周期小波的研究，而且还领导了一个周期小波研究小组．这使得他培养的博士几乎都参加了这一小波分支的深入研究．我们三人有幸分别于 1994 年，1996 年起师从陈教授开始学习和研究小波．当然，周期小波是我们的几个研究分支之一．陈翰麟教授于 2000 年写了一本英文版的有关周期小波的书([1])，我们希望写一本中文版的书，供大家参考．两者在内容上有一定的重叠．具体讲，李登峰撰写了第一章和第三章的内容；彭思龙撰写了第四章内容；谌秋辉撰写了第二章内容．最后，由李登峰和彭思龙两位通撰定稿．

著作中的内容几乎反映了一维周期小波领域的重要和最新研究成果．更主要的是，书中相当一部分内容是数学所小波研究小组几年来发表的研究成果．

在本书完成之际，我们三人非常感谢导师陈翰麟教授的长期悉心指导和合作，感谢我们各自所在单位(河南大学(李登峰)，中国科学院自动化研究所(彭思龙)，中山大学(谌秋辉))同仁们的支持，鼓励．

本书的完成得到了下列基金的资助：国家自然科学基金；河南省自然科学基金(NO. 211050300)；河南省高校青年骨干教师资助计划基金和河南大学 2002 年度自然科学基金(XK01069)．

限于作者水平，本书一定有不足之处，恳请同行和专家批评指正．